ФГОС
ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

**К УЧЕБНИКУ «МАТЕМАТИКА»
5 КЛАСС**

***Под редакцией академика РАН В.В. Козлова
и академика РАО А.А. Никитина***

Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2013

Пояснительная записка

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности и учитывают психологические особенности учащихся. Такая тенденция в области естественно-научных дисциплин проявилась давно, в частности, это можно видеть по широкому распространению специализированных классов и школ физико-математического профиля. В каждой школе встречаются учащиеся с разными способностями к изучению математики, однако не везде имеются возможности для организации специализированного обучения. Поэтому целесообразно применять учебники, включающие в себя различные уровни изложения материала.

Авторским коллективом профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета, научных сотрудников Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук реализована идея многоуровневого преподавания математики в общеобразовательной школе с 5 по 11 класс в рамках единой концепции.

Остановимся на основных принципах этой концепции.

Математика — единая наука: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, начала математического анализа и так далее являются зависимыми друг от друга дисциплинами. Единое изложение всего предмета подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов.

Математика тесно связана с различными науками. Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Книга для учителя» к учебнику «Математика» для 5 класса общеобразовательных учреждений[1] учебно-методического комплекса из серии «ФГОС. Инновационная школа. Математика» в составе трехуровневых учебников, рабочих тетрадей и дидактических материалов с 5 по 11 класс рассчитана на то, чтобы облегчить работу преподавателей, уменьшить затраты времени и усилий на восприятие замысла и содержания многоуровневого учебника.

Изучать математику целесообразно в единстве ее идей и методов. Единое изложение материала подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов, тесную связь с другими науками, а также красоту математики как важного элемента общей человеческой культуры.

Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

Развитие интереса к математике является одним из залогов ее качественного усвоения. Использование увлекательных задач позволяет подчеркнуть красоту математики и помогает сделать преподавание математики живым и менее формальным.

Математика носит абстрактный характер, имеет свои законы развития и применяется в различных сферах человеческой деятельности. Умение абстрактно мыслить вырабатывается постепенно, опираясь на конкретные реальные объекты.

Потребности использования математики в различных областях человеческой деятельности различны, так же как раз-

[1] Математика: учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. М.: Русское слово, 2012.

личны и природные склонности, способности и типы мышления учащихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объеме. Кроме того, изучение и осознанное восприятие многих математических понятий, свойств и методов требует постепенного перехода от наблюдений и экспериментов к точным формулировкам и доказательствам, неоднократного возвращения к фундаментальным понятиям.

Авторским коллективом из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одаренности детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета создан учебно-методический комплекс, в котором предложены три уровня обучения математике.

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности. Многоуровневое обучение математике, начиная с 5 класса, способно обеспечить минимальные запросы общества к уровню математической подготовки и предоставить всем учащимся широкие возможности для развития своих способностей и получения дополнительных математических знаний. При этом учителя получают возможность строить преподавание с учетом специфики учебных заведений, интересов и уровня подготовки учащихся и при наличии возможности осуществлять углубленное изучение математики. Допредпрофильным обучением мы будем называть обучение более высокого уровня в 5—6 классах, при котором уделяется повышенное внимание элементам логических рассуждений на основе конкретных примеров в дополнение к освоению фактических знаний и алгоритмов. Предпрофильным обучением принято считать обучение более высокого уровня в 7—9 классах, которое отличается не столько тем, что ученики решают в целом более трудные задачи, а скорее более точными и основательными рассуждениями, установлением взаимосвязей различных утверждений. Профильное обучение, наряду со специализированной подготовкой, осуществляемое в старших классах и реализуемое в рамках различных организационных и дидактических форм изучения предмета, рассчитано на то, чтобы учащиеся по окончании старших классов приобретали компетенции, необходимые для последующего обучения в вузах с высокими требованиями к математическим дисциплинам.

Первый уровень предполагает овладение таким минимумом знаний и умений, которые необходимы каждому культурному человеку.

Второй уровень развивает и дополняет первый уровень, тесно с ним связан и содержит часть материала для углубленного изучения математики. Он позволяет обеспечить умения и навыки, необходимые для успешного продолжения обучения в вузе.

Третий уровень — специализированный — рассчитан на воспитание профессионального интереса к математике и сознательное овладение логикой рассуждений.

В 5 классе начинает формироваться единое цельное восприятие математики, закладываются основы для ее последующего изучения. При этом выделяется ряд направлений.

Первое направление связано с развитием понятия числа. С самого начала даются общие представления о натуральных, целых, рациональных и вещественных числах, формируются устойчивые навыки работы с натуральными числами и дробями, на примерах иллюстрируется применение иррациональных чисел.

Второе направление отражает практическое значение математики и связано со сравнением величин и понятием приближения, что естественным образом увязывается с измерением величин. Особую роль при этом играет глава о применении формул в практической деятельности, цель которой — продемонстрировать учащимся широкие возможности применения математики на практике с использованием формул из любого справочника.

Это направление тесно связано с третьим направлением — понятием функциональной зависимости и проявляется также в неявной форме в виде таблиц и некоторых формул.

Четвертое направление — подготовка к систематическому изучению геометрии. Главное внимание обращается на наглядно-понятийное восприятие изучаемого материала. Моделью для наблюдения за свойствами геометрических фигур служит бумага в клеточку, свойства которой неявно принимаются в виде аксиом. Это позволяет достаточно полно изучить свойства прямоугольников и прямоугольных треугольников, изучить основные свойства площади, дать учащимся представления о теореме Пифагора и квадратном корне из числа.

Пятое направление — одновременное изложение арифметических и геометрических понятий — достигается за счет введения элементов числовой прямой и установления соответствия между числами и точками.

Шестое направление связано с логикой доказательств. В 5 классе это направление реализуется только фрагментами, причем в основном общие рассуждения реализуются на конкретных примерах.

Изучение теоретического материала предполагает решение задач и упражнений, ответы на тесты как из учебника, так и из рабочей тетради.

В целом структура учебника по математике для 5 класса достаточно традиционна: учебник разбит на главы, главы — на параграфы, параграфы разбиты на пункты, в конце каждого параграфа формулируются контрольные вопросы и приводятся задачи, упражнения и тесты.

К особенностям изложения материала следует отнести распределение пунктов по уровням изучения и наличие в конце каждого пункта так называемого «открытого» вопроса, предназначенного для того, чтобы учащиеся осмыслили прочитанное и могли найти ответ на поставленный вопрос либо из самого текста пункта, либо на основе ранее изученного материала. Иногда для ответа учащимся нужно попытаться самим дать определения понятий, обобщить некоторые рассуждения и т.п. Чаще всего предполагается, что смысл открытого вопроса является естественным продолжением основной идеи пункта. Тем самым ответ на открытый вопрос можно считать промежуточным итогом изучения материала соответствующего пункта. Открытые вопросы не являются контрольными и не всегда подразумевают наличие точных или конкретных ответов. Открытый вопрос позволяет читателю остановиться и задуматься над только что прочитанным материалом. Иногда ответ на вопрос приводит материал пункта к определенному логическому завершению. Именно поэтому необходимо найти ответы на открытые вопросы либо самостоятельно, либо с посторонней помощью. Разумеется, иногда учащиеся могут дать неверные или неудовлетворительные с математической точки зрения ответы на эти вопросы. В таком случае имеет смысл сравнить приведенный ответ с правильным и выяснить, из каких соображений проистекает правильный ответ. Тем самым делается попытка подвести учащихся к пониманию естественности математических определений, приемов рассуждений.

Материал учебника рассматривается, следуя структуре учебника, по определенной схеме. Сначала определяются **цели,** которые должны достигаться в процессе изучения данной главы, данного параграфа. Затем уточняются **особенности** изложения учебного материала данной главы, данного параграфа, особенности распределения учебного материала по уровням обучения. При этом указываются **предварительные знания, умения и навыки,** предполагаемые у учащихся. Перечисляются также **новые математические понятия и свойства**, изучение которых производится в данном параграфе или данной главе и которые могут быть определены и обоснованы с различной степенью строгости. Указываются также **вспомогательные понятия.** Это преимущественно понятия из жизненной практики или других учебных дисциплин. Вспомогательными на текущем этапе обучения могут оказаться термины, которые только упоминаются в тексте, в полном объеме будут изучаться в дальнейшем, но математическое определение которых давать преждевременно. Многократное возвращение к важнейшим понятиям способствует их лучшему восприятию, расширению кругозора, привитию ощущения «широты мира», осознанию того, что понятия могут вмещать в себя значительно больше, чем изучено на данном этапе.

В «Книге для учителя» приводятся варианты ответов на **открытые вопросы к пунктам**. Во многих случаях это только варианты ответов, так как со стороны учащихся можно ожидать разнообразных, а иногда и неожиданных правильных ответов.

Учебник 5 класса и рабочая тетрадь к нему содержат значительное число непростых задач, преимущественно рассчитанных на третий уровень. В «Книге для учителя» приводятся **указания к решению** большинства **наиболее трудных** или нестандартных **задач.**

Здесь также приведены **указания по работе с наиболее трудными тестами.** В учебнике 5 класса и рабочей тетради к нему содержатся образцы двух видов тестовых заданий. Задания первого вида достаточно традиционны — это одновариантные тесты, рассчитанные на выбор одного верного варианта из числа приведенных. Задания второго вида — многовариантные тесты, рассчитанные на выбор нескольких правильных ответов из числа приведенных. Работа над многовариантными тестами чаще всего предполагает анализ предлагаемых заданий и поиск закономерностей, с учетом которых можно получить правильный ответ, состоящий **в выборе всех верных вариантов**. Среди многовариантных тестов можно найти значительное число непростых задач, в основном рассчитанных на третий уровень. В конце «Книги для учителя» приводятся **ответы ко всем тестам** из учебника и **образцы вариантов самостоятельных и контрольных работ**.

Авторы выражают искреннюю признательность В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровнего обучения. Авторы благодарят М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе в формировании содержания трехуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — В.В. Войтишека, Т.И. Зеленяка и Д.М. Смирнова.

Глава 1
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Цель главы — познакомить учащихся с понятием геометрической фигуры на плоскости, с некоторыми основными типами фигур, дать наглядные представления об элементах геометрических фигур, выработать у учащихся навыки изображения на клетчатой бумаге простейших фигур с помощью циркуля и линейки, заложить основы для восприятия равенства плоских фигур.

Особенности главы. Глава посвящена начальному знакомству с разделом математики, который называется геометрией. Поэтому на первый план выходит наглядность изложения, привлечение значительного числа примеров и неоднократное повторение отдельных понятий. Делается это с той целью, чтобы в начале изучения нового материала не возникало недопонимания из-за неверного восприятия того или иного понятия. Основное содержание главы рассчитано на знакомство с простейшими геометрическими фигурами и их элементами, а также с понятием геометрического равенства фигур.

§ 1. ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Цель параграфа. Познакомиться с понятиями фигур на плоскости и примерами наиболее известных фигур, выработать начальные представления об элементах геометрических фигур, внутренней и внешней части фигуры; привести примеры некоторых практических способов построения фигур.

Особенности параграфа. В параграфе приводятся разнообразные примеры геометрических фигур на плоскости. Учащиеся знакомятся с рисунками треугольника, произвольного четырехугольника, окружности, дуги окружности. При изучении параграфа важное значение имеют наглядность и практические упражнения по изображению геометрических фигур с помощью линейки и циркуля. Следует широко приводить примеры из окружающего мира, дающие представление о той или иной геометрической фигуре, можно предлагать задания по изображению фигур, аналогичных тем, о которых говорится в учебнике, обсуждать особенности получившихся фигур. В результате практической работы у учащихся вырабатываются интуитивные представления о плоскости как о «ровной поверхности», на которой можно рисовать и чертить. Можно обратить внимание на то, что при изображении фигур мы используем только часть плоскости, но при необходимости эту часть плоскости мысленно всегда можно расширить.

На втором и третьем уровнях учащиеся должны научиться воспринимать разницу между замкнутыми и незамкнутыми линиями, между плоскими фигурами и фигурами из отрезков. С помощью раскраски и штриховки учащиеся должны уметь выделять простейшие области, ограниченные линиями.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается, что учащиеся на бытовом (или интуитивном) уровне знакомы с понятиями плоскости и пространства, а также с некоторыми фигурами (квадратом, прямоугольником, окружностью, кругом, ромбом).

Новые математические понятия и свойства: фигура (геометрическая фигура); треугольник; квадрат; ромб; прямоугольник; окружность; дуга окружности.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: параллелограмм; четырехугольник; эллипс.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие примеры частей плоскости можно увидеть в классной комнате?

Варианты ответа. Поверхность стола; поверхность классной доски; поверхность потолка.

1.2. Могут ли концы одного отрезка быть внутренними точками другого отрезка?

Ответ. Да, могут. Для этого можно взять две внутренние точки одного отрезка и считать их концами второго отрезка.

1.3. Сколько различных углов можно нарисовать, используя в качестве вершин углов три точки на рис. 1?

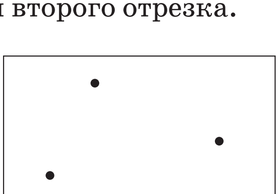


Рис. 1

Вариант ответа. Сколько угодно. Каждую из трех данных точек можно соединять отрезками с любыми другими точками, а не только с данны-

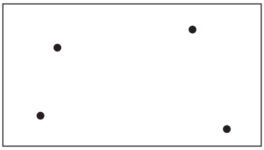


Рис. 2

ми. Поэтому и углов можно нарисовать столько, сколько захотим.

1.4. Сколько получится разных треугольников, если соединить отрезками всевозможные пары точек, изображенных на рис. 2?

Ответ. Четыре треугольника.

1.5. В чем отличие друг от друга геометрических фигур, изображенных в учебнике на рис. 7, 8 и 9?

Ответ. На рис. 7 фигура состоит только из отрезков. На рис. 8 к предыдущей фигуре добавляются новые точки. На рис. 9 к первой фигуре также добавляются новые точки, но не такие, которые добавлялись во втором случае. Можно увидеть и другие отличия. Например, фигуры на рисунках 7 и 8 — ограниченные, а фигура на рис. 9 — неограниченная.

1.6. Как при помощи одних только ножниц вырезать ромб из листа бумаги?

Ответ. Сначала перегнуть лист пополам, а затем еще раз перегнуть, совместив части края первого сгиба. После этого ножницами отрезать «уголок» и развернуть его.

1.7. Как разрезать прямоугольник на две части, из которых можно составить треугольник?

Ответ. Провести прямую линию разреза из вершины к середине одной из противолежащих сторон.

1.8. Как называется ромб, в котором имеются четыре равных угла?

Ответ. Квадрат, прямоугольник.

1.9. Какие из рассмотренных выше фигур являются параллелограммами?

Ответ. Ромб, прямоугольник, квадрат.

1.10. Какие геометрические фигуры вы можете изобразить с помощью линейки?

Вариант ответа. Ученики могут изобразить одну из перечисленных в тексте фигур, могут изобразить некоторый многоугольник, незамкнутую ломаную, многоугольную область, внешнюю область для многоугольника и т.д.

1.11. Какие геометрические фигуры изображаются при помощи циркуля?

Вариант ответа. Окружность, полуокружность, дуги окружности, фигуры, составленные из дуг разных окружностей или ими ограниченные. Примером может служить фигура, ограниченная двумя дугами пересекающихся окружностей. Такие фигуры называются луночками Гиппократа — по имени древнегреческого математика.

1.12. Какие геометрические фигуры на плоскости вы можете изобразить при помощи циркуля и линейки?

Вариант ответа. Например, окружность, квадрат. Кроме примеров из учебника желательно изобразить полуокружность, часть окружности, отрезок и др.

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.** При помощи линейки проведите отрезок. Затем проведите другой отрезок так, чтобы получившиеся отрезки имели больше одной общей точки.

Указание. Например, нарисовать один из отрезков внутри другого. Второй отрезок желательно изобразить другим цветом, предварительно приложив линейку к первому отрезку.

15.** Найдите пример такого расположения четырех точек на листе бумаги, чтобы отрезок, соединяющий две произвольные точки из этих четырех, не имел общих точек с отрезком, соединяющим оставшиеся две точки.

Указание. Выбрать три вершины какого-нибудь треугольника и еще одну точку внутри него. Другими словами, эти четыре точки должны быть вершинами невыпуклого четырехугольника.

36.** Изобразите три окружности, имеющие только две общие точки.

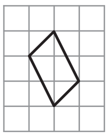
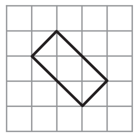
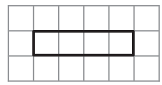
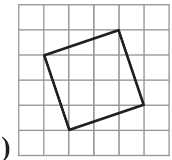
Указание. Важно понять, что через две различные точки можно провести сколь угодно много окружностей, причем центры этих окружностей расположены на прямой. Поэтому можно выбрать центры окружностей на одной прямой, взять еще одну точку вне прямой и через эту точку провести окружности с выбранными центрами.

43.** Нарисуйте окружность. Отметьте на ней точку. Затем нарисуйте вторую окружность так, чтобы отмеченная точка была единственной общей точкой этих окружностей.

Указание. Выбрать на одной прямой три точки, две из них считать центрами окружностей, а третью — общей точкой. При таком подходе к решению естественным образом возникают два различных случая расположения окружностей.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из изображенных фигур являются прямоугольниками?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

Указание. Ответ 1 не подходит, так как есть угол, который меньше другого угла.

§ 2. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Цель параграфа. Ознакомиться с клетчатой бумагой, некоторыми многоугольниками, их элементами, названиями и способами обозначений.

Особенности параграфа. В параграфе на основе понятий треугольника и прямоугольника вырабатываются общие представления о многоугольниках, вершинах и сторонах многоугольников, вводятся соответствующие обозначения. Понятие угла затрагивается только на уровне названия и примера прямого угла на клетчатой бумаге. С помощью введенных терминов описываются некоторые свойства клетчатой бумаги. При изучении параграфа следует обратить внимание на то, чтобы учащиеся усвоили терминологию, научились приводить примеры четырехугольника, пятиугольника и некоторых других многоугольников, правильно их обозначать.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: прописные буквы латинского алфавита, например, A, B, C, D, E, F, ..., M, N, K, L, P, R, S, T; строчные буквы латинского алфавита, например, x, y, z, t, v, a, b, d, r.

Новые математические понятия и свойства: многоугольник; вершина многоугольника; сторона многоугольника; соседние вершины; соседние стороны; противоположные стороны; угол в многоугольнике.

Вспомогательные понятия: порядок перечисления вершин; одинаковые стороны.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: угол; прямой угол.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Что вам известно о прямоугольниках и квадратах?

Вариант ответа. У квадрата все углы одинаковы и все стороны одинаковы. У прямоугольника все углы также одинаковы, но соседние стороны могут быть разными.

2.2. Сколько существует различных обозначений одного и того же треугольника с вершинами M, N и K?

Ответ. Шесть обозначений. Эти способы могут появиться при полном переборе первой из вершин и последующих продолжений.

2.3. Сколько существует различных обозначений одного и того же четырехугольника $PQRS$?

Ответ. Восемь. Для получения такого ответа нужно понять, что запись в определенном порядке двух соседних вершин можно продолжить только одним способом.

2.4. Какие фигуры, содержащие четыре точки, соединенные отрезками, но не являющиеся четырехугольниками, вы можете нарисовать при помощи линейки?

Вариант ответа. Например, можно рассмотреть 4 точки, лежащие на одной прямой.

2.5. Может ли пятиугольник иметь четыре стороны?

Ответ. Не может, потому что если выберем на плоскости пять точек и проведем только четыре отрезка с концами в этих точках, то найдутся точки, которые не будут общими для каких-то двух из приведенных отрезков.

2.6.* Чем отличаются соседние вершины многоугольника от не соседних?

Ответ. Соседние вершины соединяет одна из сторон, не соседние вершины не соединены стороной многоугольника.

2.7.* Какие фигуры могут получиться, если изменить порядок перечисления вершин прямоугольника?

Ответ. Может получиться тот же прямоугольник, а может получиться линия с самопересечением. При ответе на этот вопрос целесообразно последовательно рисовать стороны соответствующей фигуры, используя контур данного прямоугольника.

2.8. Что вы знаете об углах?

Вариант ответа. Угол между отрезками с общей вершиной.

2.9. Как из листа бумаги при помощи ножниц можно вырезать прямой угол?

Ответ. Сначала перегнуть лист пополам, а затем еще раз перегнуть, совместив части края первого сгиба. Разрезать по линиям сгиба.

2.10.** Какой четырехугольник можно было бы назвать «равноугольником с четырьмя вершинами»?

Ответ. Прямоугольник.

2.11. Как вы понимаете выражение «одинаковые квадраты»?

Вариант ответа. Если два квадрата вырезать, то их можно совместить, положив один на другой.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.** Каким числом способов можно записать обозначение пятиугольника $KLMNO$?

Указание. Всего десять способов. В качестве первой буквы можно выбрать одну из 5 букв, а дальше продолжить запись возможно только двумя способами. Такой подход является общим и позволяет получить все возможные способы обозначения любого конкретного многоугольника.

16.** Разместите на плоскости пять точек — A, B, C, D и E так, чтобы они были вершинами пятиугольника $ABCDE$. Переставьте в этой записи вторую и четвертую буквы. Изобразите фигуру, соответствующую полученной записи. Приведите пример, когда фигура $ADCBE$ будет многоугольником.

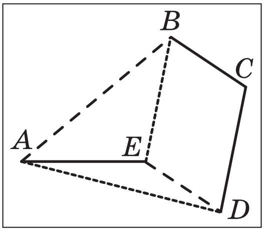


Рис. 1

Указание. Один из примеров приведен на рис. 1, где по-разному отмеченными отрезками указано два способа получения пятиугольников.

17. На рис. 2 изображен треугольник, имеющий одинаковые стороны. Вырежьте из бумаги четыре таких треугольника. Какие многоугольники можно из них сложить, совмещая целиком некоторые стороны этих треугольников?

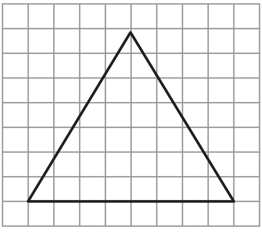


Рис. 2

Указание. Складывая указанным способом три из этих треугольников, можно получить только равнобедренную трапецию. Прикладывание четвертого треугольника приводит либо к треугольнику, либо к параллелограмму, либо к шестиугольнику.

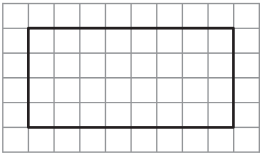


Рис. 3

18. Вырежьте из бумаги четыре таких прямоугольника, как на рис. 3. Какие многоугольники можно сложить из них, совмещая целиком некоторые стороны этих прямоугольников?

Указание. Всего можно получить многоугольники семи видов.

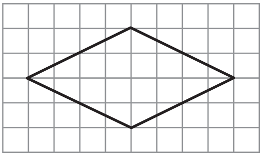


Рис. 4

19. Вырежьте из бумаги три таких ромба, как на рис. 4. Какие многоугольники можно сложить из них, совмещая целиком некоторые стороны этих ромбов?

Указание. Всего можно получить многоугольники пяти видов.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

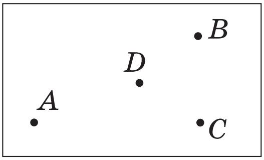


Рис. 5

1.2. Точки поставлены так, как на рис. 5. Сколько всего четырехугольников можно получить, по-разному соединяя эти точки?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Указание. Можно получить четырехугольники $ABCD$, $ADCB$, $ACBD$.

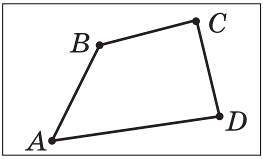


Рис. 6

1.4. Известно, что если на плоскости попарно соединять 15 различных точек, то всего получится 105 различных отрезков. Сколько всего отрезков можно получить, попарно соединяя 16 различных точек?

1) 120; 2) 121; 3) 210; 4) 240.

Указание. Соединим сначала 15 точек отрезками. Получится 105 отрезков. Теперь 16-ю точку соединим со всеми оставшимися. Получится еще 15 отрезков. Итого: 120 отрезков.

2.1. Какие из записей не являются обозначениями многоугольника, изображенного на рис. 6?

1) $ABCD$; 2) $BCAD$;

3) $ADBC$; 4) $CADB$.

Указание. В случае верного ответа должны получиться линии с самопересечениями.

§ 3. РАВЕНСТВО ФИГУР

Цель параграфа — заложить основы восприятия понятия геометрического равенства фигур на плоскости.

Особенности параграфа. В параграфе начинается знакомство с одним из самых важных понятий геометрии — равенством фигур. Понятие равенства фигур является сложным, и к нему придется возвращаться неоднократно. Сначала на уровне материальных моделей из бумаги или картона вырабатывается представление об «одинаковости» некоторых фигур и о возможности получения копии данной фигуры, то есть ее второго экземпляра. Затем на примере фигур, составленных из клеточек клетчатой бумаги, проверяется возможность совмещения копии и фигуры. На основе приведенных наглядных рассуждений вводится понятие равенства двух плоских фигур: две фигуры на плоскости называются равными, если существует перемещение, при котором копия первой фигуры полностью совмещается со второй фигурой. Следует иметь в виду, что понятие равенства непросто, и для того, чтобы идея перемещения при установлении равенства была усвоена учащимися, требуются усилия. Нужно научиться изготовлять копии фигур и выполнять перемещения разного вида: повороты, переносы копии, а иногда и переворачивания копии другой стороной. Следует обратить внимание учащихся на то, что в отдельных случаях для достижения совмещения возможны разные способы перемещения копии.

На втором уровне предлагается рассмотреть игрушку С. Лойда с иллюзией исчезновения одного из охотников. На третьем уровне формулируются основные свойства равенства геометрических фигур. На примере одного из них приводятся рассуждения, поясняющие, почему такие свойства имеют место.

Новые математические понятия и свойства: копия фигуры; перемещение; совмещение (фигуры и копии); равенство фигур; свойства равенства геометрических фигур.

Вспомогательные понятия: вертикальная линия; горизонтальная линия; разбиение фигуры на части; правила, законы и свойства.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как показать, что на клетчатой бумаге любые две клеточки с одинаковыми сторонами равны?

Вариант ответа. Если сделать копию одного из квадратов, то наложением ее можно совместить со вторым квадратом.

При ответе на этот вопрос целесообразно разъяснить, что равенство фигур отличается от сходства («похожести») фигур.

3.2. На рис 1. изображен прямоугольник $ABCD$. Как проверить, что треугольники ABC и BCD равны?

Ответ. Сделать копию треугольника ABC, перевернуть ее, а затем переместить до совмещения с треугольником BCD.

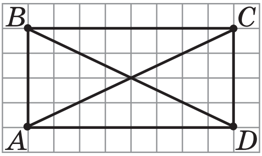


Рис. 1

3.3.** Как можно пояснить второе свойство равенства фигур из пункта 3.2?

Вариант ответа. Если фигура A равна фигуре B, то копия фигуры A и фигура B совпали, и копию фигуры A можно считать копией фигуры B. Совместив эту копию фигуры B (она же копия фигуры A) с фигурой C в силу равенства фигур B и C, заключаем, что копия фигуры A совместилась с фигурой C. Тем самым фигуры A и C равны.

3.4.* Какой из охотников, по вашему мнению, исчез на рис.3 после поворота?

Ответ. Прежде чем отвечать на поставленный вопрос, полезно поупражняться с более простой аналогичной головоломкой из задачи 27**. После этого можно заметить, что «исчез» охотник, который находился ближе всех (по ходу часовой стрелки) к стоящему внизу мальчику на рис. 2.

Рис. 2

Рис. 3

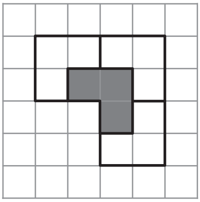


Рис. 4

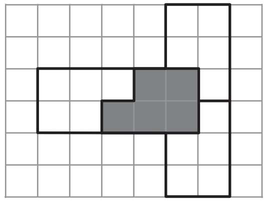


Рис. 5

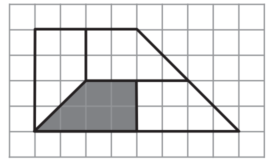


Рис. 6

3.5. Сколько способов перемещения копии точки A в точку B вы знаете?

Вариант ответа. Способов перемещения много. Например, повернуть копию листа и затем перемещать до совмещения копии точки A с точкой B.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.** Нарисуйте квадрат. Разделите его на пять равных частей.

Указание. Сначала можно разделить одну из сторон квадрата на пять равных частей. Это проще всего заметить, если на клетчатой бумаге нарисовать квадрат размером 5×5.

18.* Разделите изображенную на рис. 4 фигуру на четыре равные части.

Указание. Каждая часть состоит из трех квадратов, образующих «уголок». Один из них изображен на рис. 4 внутри данной фигуры.

19.* Разделите изображенную на рис. 5 фигуру на четыре равные части.

Указание. Каждая часть состоит из пяти квадратов. Одна из таких частей изображена на рис. 5 внутри данной фигуры.

20.** Разделите изображенную на рис. 6 фигуру на четыре равные части.

Указание. Части «похожи» на саму фигуру, то есть на прямоугольную трапецию. На рис. 6 приведен вариант деления.

24.** Как привязать козу, чтобы она могла пастись лишь на участке, имеющем вид плоской фигуры, ограниченной двумя дугами окружностей с центрами A и B?

Указание. Закрепить на шее козы две веревки длиной, равной радиусам окружностей, затем привязать козу к колышку A веревкой, равной радиусу первой окружности, и к колышку B веревкой, равной радиусу второй окружности.

26.** Посмотрите на фигуры A и B на рис. 7. Сколько можно разглядеть частей фигуры A, состоящих из клеток, которые равны фигуре B?

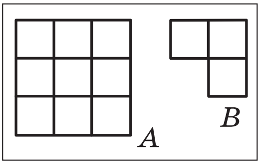


Рис. 7

Указание. Для подсчета числа частей сначала фигуру B можно перемещать, не поворачивая, до совмещения с частями фигуры A и найти четыре возможных положения. После этого аналогично рассмотреть еще три повернутых положения фигуры B.

28.** Придумайте свою головоломку с «исчезновением».

Указание. Например, можно рассмотреть две концентрические окружности и по равномерно распределенным радиусам проводить равные отрезки на возрастающем расстоянии от общего центра (рис. 8).

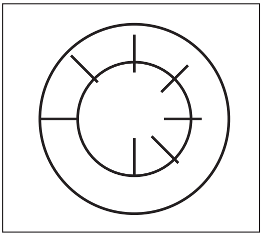


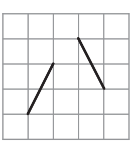
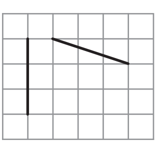
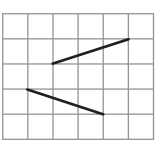
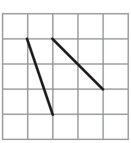
Рис. 8

30.** Разрежьте квадрат на четыре равные части. Какое множество различных способов решения этой задачи вы можете предложить?

Указание. Через центр квадрата произвольно провести две взаимно перпендикулярные прямые. Получаем бесконечное множество способов. Заметим, что вместо прямых можно проводить и другие линии.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. На каких из рисунков изображена пара неравных между собой отрезков?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

Указание. Сначала в каждом из вариантов сместить, не поворачивая, один из отрезков, чтобы его конец совместить с концом другого отрезка. Затем в вариантах 1 и 3 обратить внимание на «симметричность» относительно линии сетки, в вариантах 2 и 4 на наглядном уровне воспользоваться тем, что «гипотенуза длиннее катета».

2.4. В каких из указанных случаев квадрат $ABCD$ не будет равен квадрату $MNKL$?

1) если отрезок AB равен отрезку MN;

2) если отрезок BC равен отрезку NL;

3) если отрезок CD равен отрезку MK;

4) если отрезок AD равен отрезку NK.

Указание. Если стороны двух квадратов равны, то могут быть равны и сами квадраты. Тот факт, что это действительно так, будет доказан позже, но интуитивно это совершенно ясно уже в 5 классе. Если же сторона одного квадрата равна диагоналям другого, то такие квадраты уже точно не могут быть равными.

Глава 2
ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

Цель главы — ознакомить учащихся с измерениями и единицами измерения; с потребностью в расширении числовых систем от натуральных до целых, затем до дробных и действительных чисел; с различными числовыми системами, используемыми для записи результатов измерений; с приближенным характером определения численного значения величины с помощью измерительного прибора; с представлениями результатов измерения в виде таблиц и в виде формул («сокращенной записи таблиц»).

Особенности главы. В данной главе учащиеся в основном знакомятся с прикладным значением математики, в связи с чем рассматривается использование чисел при измерениях, задание с помощью чисел некоторых процессов, отмечается, что на практике результаты измерений чаще всего определяются только приближенно. Поэтому значительная часть главы посвящена важным для последующего понятиям приближений с избытком и с недостатком, на что и следует обратить особое внимание при изучении данной главы.

§ 1. СРАВНЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА И ШКАЛЫ

Цель параграфа — среди многообразных свойств и особенностей окружающих нас объектов выделить те, которые допускают количественное описание и изучение и которые называются *измеряемыми величинами* или просто *величинами*; рассмотреть измерение величин, которое заключается в их сопоставлении с определенными эталонами, то есть «образцовыми» величинами.

Особенности параграфа. Понятия измеряемых величин, числовых значений и единиц измерения разъясняются на примерах. Также на примерах разъясняется, что результаты измерения величин выражаются числами, которые получаются при сравнении величины с некоторыми эталонами. Число одинаковых эталонов, составляющих вместе данную величину, называется ее *числовым значением*. При этом самим эталонам отвечают единичные числовые значения, поэтому они называются также *единицами измерения*. Необходимо напомнить учащимся о некоторых известных измерительных приборах и основных единицах длины, времени, массы, температуры.

При изучении параграфа нужно обратить внимание на следующие моменты:

— различие между величиной и ее числовым значением, так как одна и та же величина в разных единицах выражается разными числами;

— неоднозначность выбора единиц измерения; в каждом конкретном случае выбор единицы обусловлен как объективными причинами (характером самой величины и удобством дальнейшего использования числового значения), так и культурными традициями;

— важность выбора общей единицы измерения при сравнении величин и выполнении операций с ними;

— умение переводить результаты измерений из одних единиц в другие однородные единицы.

Важно отметить, что не все свойства можно измерить, то есть не все они являются величинами. Таковы, в частности, вкусовые качества гастрономических изделий или художественные достоинства произведений литературы и искусства, оценка которых зависит от субъективного восприятия. Одному больше нравятся детективы, а другому — научная фантастика. Нельзя определенно сказать, что лучше — картина Шишкина «Утро в сосновом лесу» или картина Репина «Бурлаки на Волге». Как говорится, на вкус и цвет товарищей нет!

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: знакомство с различными измерительными приборами (цифровые и стрелочные часы, линейки, различные весы, градусники для измерения температуры тела и наружной температуры воздуха, спидометры автомобилей и другие приборы); умение использовать некоторые из приборов (линейку, часы, градусник); меры веса, длины, скорости, времени; существование разных типов единиц и величин измерения; знакомство с использованием результатов измерений для сравнения величин.

Новые математические понятия и свойства: величина; измеряемая величина; численное значение величины.

Вспомогательные понятия: шкала; деление шкалы.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Можно ли считать измеряемыми величинами такие качества, как «красивый», «полезный», «смешной»?

Ответ. Наверное, нет, ведь каждый «красив по-своему», способы оценок бывают разными и всегда субъективными.

1.2. Какие эталоны для измерений вы знаете?

Варианты ответа. Эталон расстояния — метр, эталон веса — грамм.

1.3. В каких единицах измерения обычно указывают расстояние между городами?

Варианты ответа. В километрах. В некоторых странах — в милях.

1.4. Можно ли ученическую линейку считать измерительным прибором?

Ответ. Да, потому что с помощью линейки можно *измерить длины* предметов, для определения численного значения линейка имеет *шкалу* с делениями.

1.5. Как водитель может определить скорость автомобиля?

Варианты ответа. Обычно водитель измеряет скорость по спидометру. Однако можно измерить скорость и с помощью дорожных километровых указателей и часов, найдя путь, пройденный за определенное время.

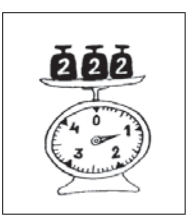
1.6.** Каких цифр больше — четных или нечетных?

Ответ. Одинаковое количество. Каждой нечетной цифре можно поставить в соответствие на единицу меньшую четную цифру.

Указания к решению наиболее трудных задач.

12. Посмотрите на рисунок. Как вы можете объяснить то, что видите?

Указание. Вес поставленных гирь превышает наибольшее значение, которое нанесено на шкале весов по окружности. Поэтому стрелка весов сделала больше одного полного оборота.



13. В гостинице за полярным кругом летом один уставший человек заснул в 9 часов. Проснувшись, он увидел, что часы показывают 10 часов 15 минут. Сколько времени он мог проспать?

Указание. Человек может проспать меньше половины суток, больше половины суток и даже больше суток. Возможные варианты ответа: 1 ч 15 мин; 13 ч 15 мин; 25 ч 15 мин.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из указанных весов можно точно получить на чашечных весах без делений, имея три гири, одна из которых — 100 г, другая — 200 г, третья — 500 г?

1) 300 г; 2) 400 г; 3) 700 г; 4) 800 г.

Указание: Понятно, как взвесить 300, 700 и 800 граммов. Но и 400 граммов тоже можно взвесить. Для этого на одну чашку весов надо поставить гирю в 500 г, а на другую — гирю в 100 г и взвешиваемый объект. Таким образом, все четыре варианта ответа правильные.

§ 2. КАКИЕ БЫВАЮТ ЧИСЛА?

Цель параграфа — показать, что потребности математики и ее приложений приводят к необходимости расширения системы натуральных чисел, которых вполне хватало для счета предметов.

Особенности параграфа. Большинство математических понятий в этом параграфе упоминается только в порядке ознакомления. Можно сказать, что здесь очерчен план развития представлений о числовых системах на ближайшую перспективу и на отдаленное будущее вплоть до окончания средней школы.

Целых чисел недостаточно уже для выражения результатов простейших измерений. Приходится использовать части целого или *дроби*.

Чтобы придать смысл операции вычитания большего числа из меньшего, к дробям и натуральным числам добавляют противоположные им *отрицательные* числа. Так возникает система *рациональных* чисел.

Но и их не хватает для вычислений и измерений. Например, еще древним грекам было известно, что длина диагонали квадрата с целочисленной стороной не может быть выражена никаким рациональным числом. Поэтому к рациональным добавляют *иррациональные* числа, образуя систему *действительных* чисел.

Наконец, в старших классах при решении алгебраических уравнений придется ввести в рассмотрение *комплексные* числа, поскольку даже не всякое квадратное уравнение имеет действительные корни

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: представление о натуральных числах; строение шкал некоторых приборов (в том числе тех, которые могут измерять отрицательные значения, например, термометр для измерения температуры на улице).

Вспомогательные понятия: термометр (градусник).

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: противоположные числа; дробные числа; число «пи»; иррациональные числа; действительные числа; вещественные числа; комплексные (мнимые) числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. В каких единицах можно выразить одним натуральным числом промежуток времени продолжительностью 2 часа 18 минут?

Ответ. Легче всего это сделать в минутах. Данный промежуток равен 138 минутам. Можно выразить в секундах — 8280, но это менее удобно.

2.2. Какие другие примеры дробных чисел вы знаете?

Варианты ответа. Например, одна треть расстояния от дома до школы, пятнадцать сотых площади поля и т.д.

2.3.* Какое число является противоположным для числа -2008?

Ответ. Противоположным будет число 2008.

2.4.** Что вам известно про число π?

Вариант ответа. Можно сказать, что π примерно равно 3, заключено между 3 и 4, примерно равно 22/7, примерно равно 3,14 и т.д. Может быть известно, что число π показывает, во сколько раз длина окружности больше ее диаметра.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.* Ночью температура воздуха каждый час понижалась на 2°C. В полночь термометр показывал +2°C. Какой была температура в 2 ч 30 мин ночи?

Указание. Можно предполагать, что за каждые полчаса температура понижается на 1°C. Поэтому до указанного времени понижение на 1°C происходило пять раз.

4.** (Задача-шутка.) Полтора рыбака за полтора дня поймали полтора судака. Сколько судаков поймают 9 рыбаков за 9 дней?

Указание. Полтора рыбака за день поймают одного судака, а за 9 дней девять судаков. Остается понять, что 9 рыбаков за 9 дней поймают в 6 раз больше, то есть 54 судака.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3.* Какие из указанных температур соответствуют морозной зимней погоде?

1) 18°С; 2) –26°С; 3) 24°С; 4) –125°С.

Указание. Морозной зимней погоде отвечает отрицательная температура. Но слишком холодно (например, –100 градусов) даже зимой не бывает.

§ 3. ЗНАЧЕНИЯ С НЕДОСТАТКОМ И С ИЗБЫТКОМ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием приближенных значений измеряемых величин, обосновать необходимость появления приближений и введение соответствующей терминологии.

Особенности параграфа. Материал параграфа очень важен для практических применений. Точные значения измеряемых величин удается получить очень редко. Как правило, стрелка измерительного прибора оказывается между двумя соседними делениями шкалы, рычажные весы не удается привести в равновесие, на цифровой шкале счетчика не хватает знаков для выражения точного расхода воды или электроэнергии и т.д. В таких случаях приходится использовать ориентировочные значения, дающие лишь приблизительное представление об измеряемой величине, но тем не менее пригодные для многих практических целей. Эти ориентировочные значения называются *приближенными* или *приближениями*.

Следует различать приближения *с недостатком*, меньшие точного значения величины, и приближения *с избытком*, большие точного значения. Кроме того, желательно знать *точность* приближения, которая показывает, насколько приближенное значение может отличаться от точного.

В тексте параграфа и упражнениях к нему на конкретных примерах показано, что многие задачи удается решить, зная только характер приближения (с избытком или с недостатком) и его точность.

Ученики должны осознать, что точность приближений зависит от наших реальных возможностей. Например, если измерять расстояние рулеткой с миллиметровыми делениями, то значения с недостатком и с избытком можно указывать с точностью до миллиметра. Но если то же самое расстояние измерять шнуром с нанесенными на нем метровыми делениями, то значения с недостатком и с избытком с точностью до миллиметра указать невозможно.

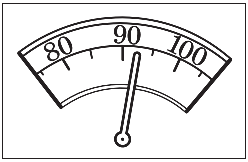
Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сравнение чисел; знакомство с «приблизительным» характером любых измерений и использование на практике приближенных значений.

Новые математические понятия и свойства: значение величины с недостатком, с избытком; приближенное значение величины; приближенное значение величины с недостатком, с избытком; приближение.

Вспомогательные математические понятия: приближенное значение величины слева, справа, снизу, сверху.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. На рисунке шкалы спидометра стрелка указывает значение скорости в первой половине промежутка от 90 до 100. В тексте пункта объясняется, что в этом случае 90 км/ч — значение скорости с недостатком. *Вопрос.* Можно ли указать более точные величины скорости с недостатком и с избытком в рассмотренном примере?



Ответ. Между делениями 90 и 100 стоит штрих, отмечающий 95 км/ч. Стрелка спидометра находится между делением 90 км/ч и 95 км/ч. Поэтому 90 км/ч — величина скорости автомобиля с недостатком, 95 км/ч — величина скорости автомобиля с избытком. Пытаться, глядя на шкалу спидометра, говорить, что скорость заключена между 92 км/ч и 93 км/ч бессмысленно, так как сама точность спидометра заведомо не позволяет определять скорость с точностью до 1 км/ч.

3.2.* Как объяснить, почему часовая стрелка проходит маленький промежуток между минутными делениями за 12 минут?

Ответ. За 1 час, то есть за 60 минут, часовая стрелка проходит 5 таких промежутков. Поэтому один промежуток между минутными делениями часовая стрелка проходит за время в 5 раз меньшее.

3.3. Какие значения можно считать приближениями сверху и снизу для температуры у поверхности Земли на Северном полюсе?

Вариант ответа. Точность ответа зависит от знания географии, но заведомо можно сказать, что приближением снизу является температура «минус 70 градусов» (самое холодное место в Северном полушарии находится в Якутии, где зарегистрирована самая низкая температура около 67,7° мороза); приближением сверху можно считать температуру 30° (трудно представить, что в окружении льдов будет сильная жара).

3.4.* Какие значения числа π с недостатком и с избытком вам известны?

Варианты ответа. Учащимся могут быть известны разные приближения, связанные с десятичным представлением $\pi = 3{,}14159265\ldots\ldots$. Хорошо, если будут отмечены такие приближения: $3 < \pi < 4$; $3{,}1 < \pi < 3{,}2$; $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. На составление одной задачи учитель тратит от 15 до 20 минут. Может ли он составить 13 задач за 3 часа?

Указание. На составление 13 задач учителю потребуется не менее $13 \cdot 15 = 195$ минут, что больше трех часов.

6. Известно, что хозяйка, занимаясь домашними делами, проходит за день значительное расстояние. Какое расстояние, из предложенных вам, наиболее правдоподобно?

Указание. Можно предполагать, что хозяйка двигается со скоростью от 2 до 4 км/ч в течение примерно 12 часов.

7.** Сумма 5 чисел равна 141. Почему среди этих чисел есть хотя бы одно, которое больше 28?

Указание. Если все 5 чисел будут не больше 28, то их сумма будет не больше 140.

11. Расстояние между соседними телеграфными столбами колеблется от 24 до 25 метров. Сколько столбов может потребоваться для прокладки телеграфной линии длиной в 10 километров?

Указание. Разделив расстояние в 10 км на промежутки по 25 метров, мы получим 400 промежутков. Устанавливая в концах этих промежутков столбы, получим 401 столб. Если на расстоянии в 10 км отмечать промежутки по 24 м, то получим 416 таких промежутков и останется еще 16 м. Отсюда следует, что по условию задачи расстояние в 10 км задачи нужно делить не более чем на 417 промежутков, в концах которых будет стоять не более 418 столбов.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какой может быть высота пятиэтажного дома, в квартирах которого высота от пола до потолка равна 3 м?

1) 11 м; 2) 12 м; 3) 15 м; 4) 17 м.

Указание. Суммарная высота помещений на пяти этажах равна 15 м. Но надо еще учесть толщину перекрытий, высоту цоколя, чердака и т.д. Поэтому высота дома должна быть больше 15 м.

§ 4. ТАБЛИЦЫ И ФОРМУЛЫ

Цель параграфа — рассмотреть разные способы представления результатов нескольких измерений; подготовить учащихся к восприятию идеи функциональной зависимости между переменными величинами.

Особенности параграфа. Прежде всего нужно обратить внимание учеников на разницу между постоянными и переменными величинами. В простейших случаях функциональную зависимость можно описать при помощи таблиц или формул. Наглядные примеры таких описаний как раз и приводятся в этом параграфе, хотя соответствующие традиционные термины «аргумент», «функция» и др. пока отсутствуют. Таблицы и формулы связывают значения переменных величин. При этом сами значения могут быть как числами, так и другими объектами — буквами, именами, названиями дней недели и т.д.

На первых порах функциональную зависимость можно понимать как соответствие между двумя переменными величинами, когда каждому значению одной величины (аргумента) ставится в соответствие некоторое значение другой величины (функции). Например, каждой букве алфавита соответствует ее порядковый номер, каждому числу календаря — название дня недели и т.д. Такое соответствие удобно изображать таблицей, где в одной или нескольких строках (или столбцах) указаны значения первой величины, а в дополнительной строке (или столбце) — соответствующие значения второй величины. Примером является хорошо известный табель-календарь. Можно сказать, что такие таблицы — «прообразы» функций одного аргумента.

Более сложной является структура таблиц — «прообразов» функций двух аргументов. Здесь каждой паре значений двух величин (аргументов) ставится в соответствие некоторое значение третьей величины (функции). Такова, например, всем известная таблица умножения, где в первой строке и первом столбце указаны значения сомножителей (аргументов), а на пересечениях строк и столбцов — соответствующее значение произведения (функции).

Правила построения таблиц первого и второго типов нетрудно объяснить на примерах без использования терминов «аргумент» и «функция».

Во многих случаях зависимость между величинами, имеющими числовые значения, можно выразить формулой. Под формулой мы здесь понимаем равенство, в одной части которого стоит буквенное обозначение зависимой величины (функции), а в другой части — арифметическое выражение, содержащее буквенные обозначения независимых величин (аргументов). Иными словами, это — правило, показывающее, как по известным значениям независимых величин вычислить соответствующее значение зависимой переменной.

Таблицу умножения можно описать формулой $p = a \cdot b$, где a и b — значения сомножителей, а p — их произведение. Этой же формулой задаются многие другие зависимости, если иначе интерпретировать входящие в нее буквы. Пусть a и b — длины сторон прямоугольника, выраженные в сантиметрах. Тогда p будет его площадью в см^2. Если же a — скорость движения, выраженная в км/ч, а b — время в часах, то p будет пройденным расстоянием в километрах.

Нетрудно привести много других наглядных примеров зависимостей, которые можно описать формулами. Особое внимание следует обратить на то, что в этих формулах участвуют числовые значения величин, выраженные в определенных единицах. При переходе к другим единицам вид формулы может меняться.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: конкретные таблицы (например, таблица умножения); некоторые формулы (например, формула зависимости периметра прямоугольника от длин его сторон).

Новые математические понятия и свойства: таблица; числовое выражение; буквенное выражение; формула.

Вспомогательные понятия: однократные и многократные измерения; результат измерения; определение пути по скорости и времени движения; постоянная скорость.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Какие примеры таблиц вам известны?

Вариант ответа. Например, таблица названий разрядных единиц, таблица показаний температуры воздуха, измеренной в рассматриваемые часы, и т.д.

4.2.* Почему классный журнал в школе можно считать таблицей?

Вариант ответа. В клеточках, которые соответствуют дню проведения урока и ученику, проставляются соответствующие этому дню и этому ученику либо оценки, либо пометки о присутствии на занятии.

4.3. Какие приставки обозначают части единиц измерения?

Варианты ответа. Санти — $\frac{1}{100}$, милли — $\frac{1}{1000}$, деци — $\frac{1}{10}$.

4.4. Какие числовые выражения вы можете написать?

Варианты ответа. $1 + 2 + 3$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; $12 \cdot 4 - 5 \cdot 7$.

4.5. Какие примеры буквенных выражений вы знаете?

Варианты ответа. $2a$; $2n + 1$; $3a - 2b$.

4.6. Какие формулы вы знаете?

Варианты ответа. Распределительный закон: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$; формула $S = a \cdot b$ для определения площади прямоугольника, стороны которого измеряются числами a и b.

4.7.* Какой формулой выражается расстояние в сантиметрах, если оно задано в километрах?

Ответ. Если C — число сантиметров в отрезке, K — число километров, то $C = 100\,000 \cdot K$ (буквы K и C можно читать по-русски, а можно как латинские).

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.* 13 февраля 1995 года был понедельник. Какой день недели был:

а) 13 марта 1995 года;

б) 13 апреля 1995 года?

Указание. С 14 февраля по 13 марта 1995 года проходит 28 дней, то есть целое число недель; с 13 февраля по 13 апреля 1995 года проходит 59 дней, что составляет 8 полных недель и еще три дня.

10.* Каждое утро Петя выходит из дома, когда часы показывают 8 ч 49 мин, и идет до школы 10 мин, чтобы появиться в классе ровно за минуту до звонка. Какого числа Петя впервые опоздает на урок, если с трех часов утра в понедельник 10 октября часы начнут отставать на 12 секунд в сутки?

Указание. Заполнить таблицу времени прихода Пети в школу по дням, указывая время в секундах. Первая запись в этой таблице на 10 октября будет иметь вид: 8 ч 59 мин 4 сек.

13.** Составьте таблицу значений d, вычисляемых по формуле $d = a + b + c$, если числа a, b, c принимают всевозможные целые значения от 0 до 3.

Указание. Соответствующая таблица, скорее всего, похожа на тетрадь: первая страница — это таблица значений d при $a = 0$, заполненная для значений b и c от 0 до 3, и т.д.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Дана таблица стоимости сахара.

Вес	2 кг	5 кг	8 кг	11 кг	14 кг
Цена	50 руб.	125 руб.	200 руб.	275 руб.	350 руб.

Какова стоимость 10 кг сахара?

1) 125 руб.; 2) 225 руб.; 3) 250 руб.; 4) 325 руб.

Указание. Особенность этого теста в том, что значения 10 кг нет в таблице. Зато есть 2 кг и 8 кг. Складывая стоимость 2 и 8 кг сахара, получим 250 руб.

Глава 3
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Цель главы — выработать у учащихся правильные представления о натуральных числах на основе неявной индукции, закрепить навыки чтения и записи натуральных чисел при помощи разрядных единиц; рассмотреть правила сравнения чисел по их десятичной записи; ввести понятие степени числа и ознакомить учащихся с различными системами счисления.

Особенности главы. Изучение данной главы основывается на тех знаниях о натуральных числах, которые ученики приобрели за период обучения в начальной школе. Новым и существенным по отношению к этому является систематизация приобретенных знаний с выделением этапов построения множества натуральных чисел, способа их записи в десятичной системе счисления и в римской нумерации, сравнения натуральных чисел. В связи с этим дополнительно рассматривается понятие степени числа с натуральным показателем и на третьем уровне рассматривается обобщенный подход к записи натуральных чисел в разных позиционных системах счисления.

§ 1. ЗАПИСЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель параграфа — объяснить принципы записи и чтения натуральных чисел в десятичной системе; познакомить учеников с римскими цифрами; рассмотреть представление натуральных чисел в виде суммы произведений цифр и разрядных единиц.

Особенности параграфа. Параграф имеет преимущественно повторительный характер, хотя в нем делается попытка добиться более осознанного, чем прежде, понимания принципов записи натуральных чисел в позиционной системе счисления, то есть представления натуральных чисел в виде суммы с использованием цифр и разрядных единиц. Для реализации этого направления приходится ввести число 0.

Главное внимание следует обратить на принципы образования каждой очередной разрядной единицы. По цифровой записи натурального числа школьник должен уметь его прочитать и, наоборот, записать число цифрами по его названию.

Пункт 1.10* вынесен на второй уровень, однако вполне доступен большинству учеников. В этом пункте объясняются символы и принципы римской нумерации. По принципам римской нумерации учителю полезно представлять, что этот способ записи складывался постепенно, например, когда-то в Древнем Риме число 4 записывалось IIII, и только потом эту запись заменили более короткой IV. Принципиальный момент римской нумерации: если меньшая «цифра» записана правее большей, то эти «цифры» складываются, кроме того случая, когда за меньшей цифрой идет следующая за ней «цифра», как, например, в числе XIX число I вычитается из написанного правее числа 10, XIX = 10 + (10 − 1) = 19; более одной меньшей «цифры» не вычитается, например, не допускается запись IIX для числа 8, хотя она и короче. Все это показывает некоторую нелогичность римской нумерации, наличие не самых простых правил записи чисел. Позиционная система гораздо удобнее.

При изучении этого пункта достаточно стремиться к тому, чтобы большинство учеников умело записывать в римской нумерации числа от 1 до 100.

Новые математические понятия и свойства: цифры десятичной системы счисления; число нуль; разрядные единицы; римские цифры.

Вспомогательные понятия: класс разрядных единиц; римская нумерация.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какое натуральное число следует за числом 399?

Ответ. 400. Цель этого вопроса состоит в уяснении того, как при счете происходит смена цифр соответствующих разрядов. Если подобные вопросы вызывают затруднения, то необходимо вернуться к объяснению принципов записи небольших чисел, используя для иллюстрации счеты.

1.2. Как прочитать натуральное число, следующее за числом, равным 11 десяткам?

Ответ. Так как 11 десятков равно 110, то следующее за ним число 110 + 1 = 111 и читается как «сто одиннадцать».

1.3. Какие цифры используются для записи чисел в десятичной системе счисления?

Ответ. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1.4. Как образуются разрядные единицы?

Ответ. Новая разрядная единица образуется из 10 единиц предыдущего разряда, то есть каждая очередная разрядная единица в 10 раз больше предшествующей.

1.5. Как сокращенно записать сумму: $7 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8$?

Ответ. 7008.

1.6. Как называется число, равное ста тысячам тысяч?

Ответ. Тысяча тысяч — это один миллион, поэтому указанное число называется «сто миллионов».

1.7. Какие разрядные единицы вы знаете?

Ответ. Учащиеся должны знать разрядные единицы: 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000, 1 000 000 000. В таблице из п. 2.2* приведены названия других разрядных единиц (с промежутком в 3 разряда). Принципы образования названий не входящих в таблицу промежуточных разрядных единиц учащимся следует разъяснить. Например, 10^{20} — это 100 единиц, равных помещенной в таблице разрядной единице «квинтиллион», а поэтому 10^{20} — это «сто квинтиллионов».

1.8. Сколько секунд длится один невисокосный год?

Ответ. $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,536\,000$ сек.

1.9.* Сколько нужно знать слов, чтобы можно было назвать любое натуральное число от 1 до 99?

Ответ. Первый способ. При стандартном названии нужно 9 слов для чисел от 1 до 9, 9 слов для чисел от 11 до 19, 8 слов для чисел 20, 30, ..., 90. Всего 26 слов.

Второй способ. Можно обойтись девятью словами для названия цифр и двумя словами для названия двух разрядных единиц. Например, число 96 можно назвать: «девять десятков шесть единиц».

1.10.* Как записать с помощью римских цифр число 1999?

Ответ. MCMXCIX (M «тысяча» + CM «девятьсот» + XC «девяносто» + IX «девять»).

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.** (Задача-шутка.) У меня три спички. Если я к ним прибавлю еще две, то станет восемь. Как это может получиться?

Указание. Воспользуйтесь римскими цифрами. Сложите спички в виде числа VIII.

15. Сколько слов русского языка нужно знать, чтобы прочитать число 999 999 999 999, записанное в десятичной системе?

Указание. К тем словам, которые требуются для прочтения числа 999, достаточно добавить слова «тысяча», «миллион», «миллиард».

§ 2. СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

Цель параграфа — знакомство с натуральной степенью числа.

Особенности параграфа.

В параграфе знакомство со степенью числа начинается с сокращения записи разрядных единиц, после чего понятие степени a^n обобщается на натуральные показатели $n > 1$ для произвольного числа a. Ученики должны научиться правильно определять показатель и основание степени, правильно читать обозначения степени, в том числе и часто используемые обозначения a^2 и a^3. При записи разрядных единиц в виде степени числа 10 следует обратить внимание на то, что показатель степени равен числу нулей в записи разрядной единицы. Это обстоятельство может облегчить восприятие обозначений степени с показателем 1 и с показателем 0.

На третьем уровне учащимся приводится пример логарифма.

Новые математические понятия и свойства: степень числа 10 (как сокращенная запись разрядной единицы); степень числа a; основание степени; показатель степени.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: логарифм числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как называется число, равное 10^9?

Варианты ответа. «Десять в девятой степени»; «один миллиард»; «миллиард». Быть может, некоторые учащиеся знают, что в США это число называется «биллион».

2.2. Чему равно произведение $10^9 \cdot 10^0$?

Ответ. 10.

2.3. Сколько нулей содержит в десятичной записи число дециллион?

Ответ. 33 нуля.

2.4. Как записать число 1024 в виде степени числа 4?

Ответ. $1024 = 4^5$. Чтобы получить этот результат, можно последовательно вычислять: $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$. Если кто-то из учеников знает, что $1024 = 2^{10}$ (очень полезное равенство), то он может понять, что 10 сомножителей, равных 2, можно объединить попарно в 5 сомножителей, каждый из которых равен $2 \cdot 2 = 4$.

2.5. Какой смысл имеет цифра 6 в правой части равенства $64 = 2^6$ и какой смысл имеет цифра 6 в левой части этого равенства?

Ответ. В левой части записи цифра 6 означает количество десятков в числе, в правой части — показатель степени, то есть сколько раз нужно взять в качестве сомножителя 2, чтобы получить 64.

2.6.** Чему равен логарифм числа 256 по основанию 4?

Ответ. Для решения задачи можно выписать степени числа 4:

$4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$. Число $\log_4 256$ по определению равно показателю степени, в которую нужно возвести 4, чтобы получить 256, и потому равно 4.

2.7. В какую степень нужно возвести число a, чтобы получить произведение чисел a^2 и a^3?

Ответ. В пятую степень. Возможное решение:

$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

11.** Найдите десятичную запись для чисел: а) 8^9, б) 9^5, в) 13^6?

Указание. Для этого нужно проделать некоторые вычисления. Группировка сомножителей может облегчить эту работу.

15.** Запишите 3^{12} в виде степени числа: а) 9; б) 27; в) 81; г) 729.

Указание. Число 3^{12} можно записать в виде произведения 12 сомножителей, равных 3. Группируя их по два, получаем представление этого числа в виде степени числа 9, группируя по три — в виде степени числа 27, группируя по четыре — в виде степени числа 81, группируя по шесть — в виде степени числа 729.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных чисел являются степенью числа 2?

1) 18; 2) 32; 3) 64; 4) 98.

Указание. Зная, что $2^5 = 32$, нетрудно последовательным умножением получить 2^6, 2^7 и после этого выбрать ответы.

2.4. Какие из указанных чисел можно представить в виде квадрата натурального числа?

1) $2^3 \cdot 3^3$;   2) 4^3;   3) 3^3;   4) 3^4.

Указание. Одна из возможностей — это вычислить каждое из выражений и сравнить с известными квадратами первых натуральных чисел.

§ 3. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Цель параграфа — познакомить учащихся с существованием других позиционных систем счисления: двоичной, четверичной и шестнадцатеричной; научиться переводить запись чисел из k-ичной системы счисления в десятичную.

Особенности параграфа. В параграфе запись натуральных чисел в виде сумм произведений цифр и степеней числа 10 обобщается, и в качестве примеров рассматриваются аналогичные суммы произведений цифр 0, 1, 2, 3 и степеней числа 4, а также суммы произведений цифр 0, 1 и степеней числа 2. В результате учащиеся получают начальные представления о различных позиционных системах счисления. В конце параграфа приводятся краткие сведения о шестнадцатеричной системе счисления, в которой для записи чисел требуется более десяти цифр.

При изучении этого материала важную вспомогательную роль играют таблицы начальных степеней числа 4 и числа 2. Использование таблиц сокращает время, которое нужно для записи чисел в двоичной и четверичной системе счисления. Учащимся можно сообщить, что рассмотренные системы счисления выбраны не случайно и имеют отношение к работе компьютеров. Более того, запись числа в двоичной системе позволяет быстро получить его запись в четверичной системе, а последняя — получить запись числа в шестнадцатеричной системе. Проиллюстрировать это можно на примере. Возьмем равенство $213 = (11010101)_2$. Разбивая цифры двоичной записи справа на группы по две цифры, получим $(11)_2$, $(01)_2$, $(01)_2$, $(01)_2$. Переводя каждую группу из двоичной записи в десятичную, получаем 3, 1, 1, 1. Это цифры записи числа 213 в системе счисления с основанием 4, то есть $213 = (3111)_4$. Далее, разбивая цифры этой записи справа на группы по две цифры, получим $(31)_4$, $(11)_4$. Переводя каждую группу из четверичной записи в десятичную, получим 13, 5. Это «цифры» записи числа 213 в системе счисления с основанием 16. Так как «цифра» 13 обозначается через D, то $213 = (D5)_{16}$.

Весь материал параграфа, кроме пункта 3.1, предназначен для изучения на втором уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: знакомство учащихся с записями чисел в десятичной системе.

Новые математические понятия и свойства: системы счисления по основаниям 2, 4 и 16; цифры рассматриваемой системы счисления.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как записать число 2009 в виде суммы произведений при помощи цифр и степеней числа 10?

Ответ. $2009 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1$, или, используя сокращенную запись степени,

$2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1$.

3.2.* Как в десятичной системе счисления записать число $(1000)_4$?

Ответ. $(1000)_4 = 4^3 = 64$, так как $(1000)_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 4^3$.

3.3.* Какое число в десятичной системе соответствует записи $(11010101)_2$?

Ответ. $(11010101)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 1 = 213$.

3.4.** Сколько цифр потребуется для записи числа 1999 в шестнадцатеричной системе счисления?

Ответ. Три цифры в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение. Выписываем степени числа 16 и находим, что $16^2 < 1999$, $16^3 > 1999$. Отсюда уже ясно, что потребуется не более трех цифр.

Хотя это и не требуется для ответа на вопрос, поясним, как найти шестнадцатеричную запись числа 1999. Получив, что $16^2 = 256$, $16^2 < 1999$, $16^3 > 1999$, будем умножать число 256 на натуральные k и найдем, что $256 \cdot 7 < 1999$, $256 \cdot 8 > 1999$. Затем из 1999 вычитаем $7 \cdot 16^2$: $1999 - 1792 = 207$. Затем будем умножать число 16 на натуральные k и найдем, что $16 \cdot 12 < 1999$, $16 \cdot 13 > 1999$. Далее из 207 вычитаем $12 \cdot 16$: $207 - 192 = 15$.

Итак, $1999 = 1792 + 192 + 15 = 7 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = (7CF)_{16}$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.* Запишите в троичной системе счисления числа: а) 2, б) 6, в) 8, г) 9, д) 11, е) 15, ж) 19.

Указание. Для решения этой задачи нужно посмотреть ответ на открытый вопрос к п. 3.4.**.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2.* Какова десятичная запись числа $(302)_4$?

1) 46; 2) 48; 3) 50; 4) 52.

Указание. Заданное число равно $3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 50$.

2.2.* Какие из указанных чисел используются как разрядные единицы в системе счисления с основанием 4?

1) 1; 2) 4; 3) 8; 4) 12.

Указание. Для ответа нужно выбирать число 1 и степени числа 4.

2.3.* Какие из указанных чисел будут двузначными при их записи в системе счисления с основанием 4?

1) 3; 2) 9; 3) 12; 4) 18.

Указание. В четверичной системе наименьшее двузначное число равно 4, наибольшее равно $3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 15$.

2.4.* Какие из указанных чисел будут трехзначными при их записи в двоичной системе счисления?

1) 3; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

Указание. В двоичной системе наименьшее трехзначное число равно 4, наибольшее равно $2^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

§ 4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

Цель параграфа — для натуральных чисел определить понятие неравенства, рассмотреть общее правило сравнения натуральных чисел по их десятичной записи, добиться того, чтобы учащиеся могли из нескольких натуральных чисел выбрать наименьшее или наибольшее число.

Особенности параграфа. За основу определения неравенства между натуральными числами выбрано их взаимное расположение в ряду натуральных чисел, который получается из числа 1 последовательным добавлением единицы. Это естественным образом приводит к правилу сравнения натуральных чисел по их десятичной записи. На втором уровне в порядке ознакомления приводится основное свойство упорядоченности, то есть транзитивность. На третьем уровне дополнительно разбираются два сложных примера.

Практически все задачи параграфа можно предлагать на первом уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается, что школьники умеют сравнивать небольшие натуральные числа, пользуясь знаками $<$ и $>$.

Новые математические понятия и свойства: сравнение любых двух натуральных чисел; основное свойство упорядоченности; правила сравнения натуральных чисел.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: порядок в ряду натуральных чисел; упорядоченность.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Почему $10^6 > 10^3$?

Ответ. Число 10^6 в десятичной записи содержит 7 цифр, число 10^3 — 4 цифры. По правилу сравнения первое число больше второго.

4.2.* В пункте рассматривается свойство: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. *Вопрос.* Как записать это свойство упорядоченности с использованием знака «больше»?

Ответ. Если $c > b$ и $b > a$, то $c > a$.

4.3.** В пункте рассматривается задача поиска наименьшего числа из расположенных в столбец чисел попарными сравнениями, начиная с нижнего числа. При этом наименьшее число поднимается на самый верх, то есть «всплывает как пузырек». *Вопрос.* Как изменить рассуждение так, чтобы наибольшее число «тонуло, как камень?

Ответ. Начинаем с верхнего числа, сравниваем его с числом, стоящим под ним; если нижнее число больше, то переходим к нему, если нижнее число меньше, то меняем числа местами и переходим к сравнению с числом, находящимся ниже.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Сумма двух натуральных чисел меньше 18, а одно из чисел равно 14. Чему может быть равно второе число?

Указание. Последовательно прибавлять к числу 14 натуральные числа, пока не придем к равенству $14 + 4 = 18$. В результате приходим к ответу: 1, 2, 3.

3. Разность двух натуральных чисел больше 10, а уменьшаемое равно 15. Чему может быть равно вычитаемое?

Указание. Найти разность $15 - 10 = 5$ и отсюда сделать вывод, что подходят только числа 1, 2, 3, 4.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Какое из указанных чисел наименьшее?

1) 4^4; 2) $2 \cdot 4^3$; 3) 4^5; 4) $3 \cdot 4^2$.

Указание. Решение сильно упрощается, если в каждом из чисел выделить общий множитель 4^2.

2.2. Количество каких чисел меньше 100?

1) всех трехзначных чисел;

2) всех трехзначных чисел, оканчивающихся на нуль;

3) всех трехзначных чисел, начинающихся на цифру 1;

4) всех трехзначных чисел, в записи которых используются *толь*ко цифры 8 и 9.

Указание. Число трехзначных чисел, начинающихся на цифру 1, в точности равно 100, поэтому ответ 3 — неверный.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Цель параграфа — ознакомить учащихся с практически важной задачей сравнения рассматриваемых чисел с другими, которые в определенном смысле проще воспринимаются, а поэтому и легче запоминаются.

Особенности параграфа. В параграфе изучаются некоторые правила замены натуральных чисел их приближенными значениями и вводится понятие точности приближения. Учитывая то, что с приближенными значениями, возникающими в результате измерений, учащиеся ознакомились во второй главе, рекомендуется перед изучением этого параграфа вспомнить о приближенных значениях с недостатком и с избытком. После этого можно переходить к важному случаю приближенных значений натурального числа с недостатком с заменой нескольких последних цифр нулями. Усвоив такие приближения, можно переходить к правилу получения соответствующих приближений с избытком, также оканчивающихся нулями. Учитывая, что при этом способе соответствующие значения с избытком и с недостатком отличаются на разрядную единицу, точность приближенных значений характеризуют этой разрядной единицей.

На втором уровне дополнительно рассматривается второй важный случай замены натурального числа его приближенным значением, который связан с указанием порядка числа. Можно указать на его связь с приближениями с недостатком и с избытком. Например, в записи $10^3 \le 2813 < 10^4$ указывается, что число 2813 имеет порядок 1000 — приближение с недостатком, а приближение с избытком — следующая разрядная единица, то есть 10^4. Иначе — указание порядка величины числа помещает его между двумя соседними степенями 10 (разрядными единицами).

Для примеров порядков величин полезно использовать сравнение больших расстояний, например, насколько искусственный спутник Земли (≈ 300 км) ближе к Земле, чем Луна; насколько Солнце дальше от Земли, чем Луна, и т.д.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: знакомство с примерами приближенных значений с недостатком и с избытком.

Новые математические понятия и свойства: приближение с недостатком; приближение с избытком; десятичное приближение с недостатком, с избытком (приближение натурального числа числами с нулями в конце записи); приближенное равенство; точность приближения.

Вспомогательные понятия: порядок величины числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Чему равно натуральное число, если его значения с избытком и недостатком равны соответственно 17 и 15?

Указание. В этом пункте предполагается, что приближение с недостатком меньше самой величины, а значение с избытком больше этой величины.

Ответ. 16.

5.2. Какими значениями обычно указывают приближенный возраст человека?

Ответ. У только что родившегося младенца возраст измеряют днями, далее неделями, месяцами. До среднего возраста измеряют годами, а дальше часто переходят на десятилетия (указывая приближения возраста обычно с недостатком).

5.3. С какой точностью указана масса Луны в последнем примере?

Ответ. С точностью до 10^{19} т.

5.4. С какой разрядной единицей сравнимо по порядку число месяцев в году?

Ответ. С разрядной единицей 10.

5.5.* Какие примеры различных по порядку величин вы знаете?

Ответ. Вариантов очень много. Например, длины в 1 мм, 1 м, 1 км по порядку различны; массы в 1 мг, 1 г, 1 кг, 1 т по порядку различны.

5.6.* На постройку дачного домика требуется 4816 кирпичей. Хватит ли на постройку трех таких домиков 36 поддонов по 400 кирпичей?

Ответ. $36 \cdot 400 = 3 \cdot 4800 < 3 \cdot 4816$. Поэтому 36 поддонов недостаточно.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. Расстояние от дома до школы равно 982 метрам. Чему приблизительно равно расстояние от дома до школы с точностью: а) до десятков метров; б) до сотен метров; в) до километра?

Указание. Обозначим расстояние от дома до школы через d. Тогда: а) $d \approx 980$ м с недостатком и $d \approx 990$ м с избытком с точностью до 10 м; б) $d \approx 900$ м с недостатком и $d \approx 1$ км с избытком с точностью до 100 м; в) $d \approx 0$ км с недостатком и $d \approx 1$ км с избытком с точностью до 1 км. После этого нужно выбрать те значения, о которых спрашивается в задаче.

7.* Расстояние между пунктами A и B примерно 3 км с избытком. Может ли быть так, что со скоростью 4 км/ч из пункта A в пункт B удастся пройти за 25 минут?

Указание. Если считать, что расстояние задано с точностью до километра, то следует ответить, что не удастся. Действительно, со скоростью 4 км/ч за 25 минут проходят расстояние, меньшее 2 км. Важно обратить внимание на то, что ответ на поставленный вопрос зависит от того, как мы понимаем фразу «примерно 3 км с избытком», считать ли возможным расстояние между пунктами меньше, чем 2 км, или нет.

11.* Приведите пример, когда приближение числа с избытком имеет больший порядок, чем порядок самого числа.

Указание. Для числа 999 можно взять приближенное значение с избытком, равное 1000. Но по определению число 999 имеет порядок числа 100, число 1000 имеет другой порядок, а поэтому числа 999 и 1000 имеют разный порядок.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Укажите десятичное приближение с избытком для числа 936 с точностью до 10^3.

1) 700; 2) 800; 3) 900; 4) 1000.

Указание. Десятичные приближения с точностью до 1000 — это числа, в конце десятичной записи которых стоят три нуля.

2.4. Какие из указанных чисел по порядку величины сравнимы с 99999?

1) 102 030; 2) 10 203; 3) 90 909; 4) 9090.

Указание. Данное в условии число по порядку величины сравнимо с 10 000. С этой разрядной единицей сравнимы числа из вариантов 2 и 3.

Исторические сведения

В позиционных системах счисления один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен. Считается, что позиционная нумерация была изобретена в Древнем Вавилоне и Шумере. К числу таких систем относится современная десятичная система счисления. Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев рук у человека

Древнейшая известная запись позиционной десятичной системы обнаружена в Индии в 595 г. Нуль в то время применялся не только в Индии, но и в Китае. В этих старинных системах для записи одинакового числа использовались символы, рядом с которыми дополнительно помечали, в каком разряде они стоят. Потом перестали помечать разряды, но число все равно можно прочитать, так как у каждого разряда есть своя позиция. А если позиция пустая, ее нужно пометить нулем. В поздних вавилонских текстах такой знак стал появляться, но в конце числа его не ставили. Лишь в Индии нуль окончательно занял свое место, эта запись распространилась затем по всему миру. Индийская нумерация пришла сначала в арабские страны, затем через итальянских купцов и в средневековую Западную Европу. Одним из главных источников был труд среднеазиатского математика Аль-Хорезми, написанный на арабском языке, поэтому за индийскими цифрами в Европе закрепилось неправильное название — «арабские».

Простые и удобные правила сложения и вычитания чисел, записанных в позиционной системе, сделали ее особенно популярной.

Глава 4

ОТРЕЗОК, ЛОМАНАЯ

Цель главы. Дать наглядное представление об отрезке и практических способах измерения длины отрезка, обобщить процедуру измерения длины, изучить основные свойства длины, неравенство треугольника и научить применять эти свойства при решении задач; ознакомиться с понятием ломаной, которая моделирует непрерывный путь из одной точки в другую, составленный из отрезков.

Особенности главы. В главе на основе наглядных представлений об отрезках, которые воспринимаются как геометрические фигуры, начерченные карандашом с помощью линейки, рассматривается процедура измерения, приводящая к понятию длины отрезка, изучаются основное свойство длины и неравенство треугольника. Этот материал на третьем уровне дополняется изучением характеристического свойства точек отрезка. После этого рассматриваются простейшие фигуры, составленные из отрезков, которые называются ломаными. На первом уровне изучение ломаных ограничивается конкретными примерами. На третьем уровне демонстрируются некоторые особенности ломаных, которые показывают, что понятие ломаной является непростым математическим понятием.

§ 1. ОТРЕЗОК. РАВЕНСТВО ОТРЕЗКОВ

Цель параграфа — рассмотреть равенство отрезков и различные случаи взаимного расположения двух отрезков, выработать наглядные представления об отрезке, составленном из двух или нескольких отрезков.

Особенности параграфа. В начале параграфа напоминается построение отрезка по его концам с помощью линейки. При этом обращается внимание на единственность отрезка с концами в двух заданных точках. Затем на основе общего понятия равенства геометрических фигур особо рассматривается равенство отрезков и записываются общие свойства равенства отрезков.

Основное внимание при изучении данного параграфа следует обратить на возможные случаи взаимного расположения двух отрезков. Выделяются случаи, когда два отрезка не пересекаются, то есть не имеют общих точек, и когда два отрезка пересекаются, то есть имеют общую точку, не совпадающую ни с одним из концов этих отрезков.

Для последующего изучения свойств длины важным является случай, когда один отрезок составлен из двух других. Введение этого понятия служит наглядным эквивалентом понятия «между» для трех точек, которое часто рассматривается при более формальных подходах к аксиоматическому построению курса евклидовой геометрии.

Предварительные знания, умения, навыки. Предполагаются известными: отрезок; конец отрезка; навыки работы с линейкой.

Новые математические понятия и свойства: равенство отрезков; свойства равенства отрезков; непересекающиеся отрезки; пересекающиеся отрезки; отрезок, составленный из двух других отрезков.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какое наибольшее число отрезков с концами в различных вершинах квадрата можно получить?

Вариант ответа. Пусть $ABCD$ квадрат. Соединяя вершину A с тремя оставшимися, затем вершину B с тремя остальными, затем аналогично вершины C и D, получим всего $4 \cdot 3$ комбинаций. Но при этом каждый из отрезков будет проведен дважды. Поэтому наибольшее число отрезков $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

1.2. Как проверить, что соседние стороны квадрата равны?

Вариант ответа. Сделать копию квадрата и повернуть ее вокруг общей вершины соседних сторон так, чтобы копия одной стороны квадрата совпала с другой его стороной.

1.3. Какие свойства равенства для чисел вы знаете?

Ответ. 1) Число равно самому себе. 2) Если первое число равно второму, то и второе число равно первому. 3) Если каждое из двух чисел равно третьему числу, то такие числа равны.

1.4. Могут ли два отрезка на плоскости иметь более одной общей точки?

Ответ. Могут. Например, если первый отрезок составлен из второго и третьего отрезка, то у первого и второго отрезка сколь угодно много общих точек.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.* Нарисуйте треугольник с равными сторонами.

Указание. Можно отметить точку, с центром в этой точке нарисовать окружность, выбрать на этой окружности другую точку и, не меняя раствора циркуля, нарисовать другую окружность. Одна из общих точек окружностей и центры окружностей удовлетворяют условиям задачи. Выбор другой общей точки окружностей дает еще один способ.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Какой из отрезков на рис. 1 равен отрезку AB?

1) BC; 2) CD; 3) DE; 4) AE.

Указание. Можно заметить, что копию отрезка AB удается переместить в отрезок DE, не поворачивая копию. Это позволяет выбрать нужный вариант ответа. Объяснить, почему остальные варианты не подходят, на данном этапе достаточно сложно.

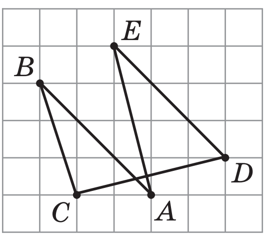


Рис. 1

2.1. Какие из изображенных на рис. 2 отрезков равны отрезку AB?

1) CD; 2) EF; 3) GH; 4) KL.

Указание. Каждому отрезку можно сопоставить треугольник, у которого одна сторона совпадает с отрезком, а остальные стороны расположены на линиях сетки. Отрезку AB соответствует треугольник со сторонами в 1 и 4 клетки. Ориентируясь на наглядные представления о равенстве прямоугольных треугольников, можно выбрать единственно подходящий вариант 3.

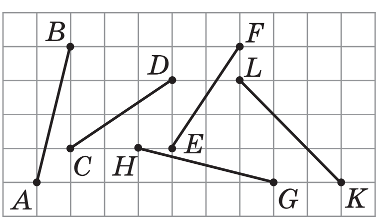


Рис. 2

§ 2. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Цель параграфа — ввести понятие длины отрезка, сначала опираясь на знакомую процедуру измерения с помощью линейки, а затем рассмотреть обобщение; определить понятие расстояния между двумя точками.

Особенности параграфа. В начале параграфа измерение отрезков осуществляется при помощи линейки. Затем на примере измерения отрезков в шагах сетки клетчатой бумаги указывается на возможность обобщения процедуры измерения. После такой предварительной работы формулируется следующее свойство: «Выбор некоторого отрезка в качестве единичного позволяет любому другому отрезку приписать число, называемое его длиной». Чтобы различать в обозначениях отрезок и его длину, длина отрезка AB обозначается как $|AB|$. В конце параграфа определяется расстояние между точками, в том числе и расстояние от точки до нее самой.

При изучении параграфа следует обратить внимание на приближенный характер определения длины отрезка при помощи линейки и поэтому выработать у учащихся практические навыки измерения длин с точностью до 1 мм. Ученики должны осознать, что каждый отрезок имеет определенную длину, но численное значение длины отрезка зависит от выбора единицы измерения.

Несмотря на то что для обозначения длины отрезка вводится особое обозначение, для удобства сразу же разрешается длину отрезка обозначать так же, как и отрезок, если ясно, что речь идет о длинах. Допускать двоякое обозначение длины проще, чем удерживаться на уровне сложного обозначения на протяжении всего школьного курса геометрии.

На втором и третьем уровне целесообразно обратить внимание на свойство, что равные отрезки имеют равные длины. Принимая без обоснования такое свойство, мы тем самым фиксируем одно из самых важных свойств перемещений: если перемещение копию одного отрезка переводит в другой отрезок, то длины таких отрезков равны, а если длины двух отрезков равны, то найдется перемещение, которое копию одного отрезка переводит в другой. На первом уровне такое свойство выглядит довольно естественно и воспринимается без особых затруднений, хотя и не фиксируется в явном виде.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: навыки счета; умение работать с линейкой; знакомство с единицами измерения; равенство отрезков.

Новые математические понятия и свойства: результат измерения длины отрезка; результат измерения с недостатком и с избытком; длина; единица длины; свойства длин равных отрезков; расстояние между точками, неравенство треугольника.

Вспомогательные понятия: шаг сетки.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как измерять отрезки на местности?

Варианты ответа. Рулеткой, шагами, оценивая расстояние на глаз.

2.2. Какие единицы измерения длины вам известны?

Вариант ответа. Учащиеся должны знать основные меры длины: километр, равный 1000 метров; метр, равный 100 см; дециметр, равный10 см; сантиметр, равный 10 мм.

2.3. Как на практике можно определить длину отрезка?

Вариант ответа. При помощи измерения. При этом должна быть указана единица измерения (метр, сантиметр, миллиметр и т.д.).

2.4. Какие примеры изменения единицы измерения длин отрезков вы знаете?

Вариант ответа. Например, если на местности измерять значительные расстояния, то часто достаточно производить измерения в метрах. Однако для измерений в пределах тетрадного листа нужны уже другие единицы измерения: сантиметры и миллиметры.

2.5. Как вы понимаете слова «расстояние от Земли до Луны»?

Вариант ответа. Это некоторое среднее значение, так как реально во времени такое расстояние изменяется. В справочниках указывают значение около 380 000 км. Полезно обратить внимание учащихся также на тот факт, что расстояние между двумя шарами можно понимать по-разному (например, как расстояние между их центрами и как кратчайшее расстояние).

2.6. Что вы можете сказать о равенстве длин двух противоположных сторон прямоугольника?

Указание. Если в прямоугольнике взять сторону и противоположную ей сторону, то длины этих сторон равны.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. На рис. 1. заданы точки A, B, C, D и E. Нарисуйте все отрезки, концами которых являются пары этих точек. Сколько отрезков должно получиться?

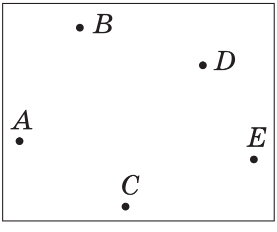


Рис. 1

Указание. Рассуждения, аналогичные ответу на вопрос из пункта 1.1, приводят к числу $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

14.** При измерении некоторого отрезка AB за единицу был принят отрезок PQ длиной 1 м 1 см 1 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах равна 20. Чему равна длина отрезка AB в сантиментах?

Указание. Чтобы увеличить значение 1 м 1 см 1 мм в 20 раз, можно выразить его в миллиметрах, умножить на 20, а затем в полученном ответе выделить число метров и оставшихся сантиметров.

15.** При измерении высотного здания в этажах получили 60 этажей и еще надстройку высотой 5 м. Чему равна высота этого здания в метрах, если высота каждого этажа 3 м 50 см?

Указание. В дециметрах найти значение $60 \cdot 35 + 50$, а затем перевести в метры.

17.** У плотника есть веревка длиной ровно 4 м. Как с ее помощью отмерить доску длиной: а) 2 м; б) 3 м?

Указание. Сложив веревку пополам, получаем мерку длиной 2 м, еще раз сложив пополам, получим мерку длиной 1 м, после чего нетрудно отмерить 3 м.

19.** Сколько можно указать вертикальных и горизонтальных отрезков, концами которых являются точки, отмеченные на рис. 2?

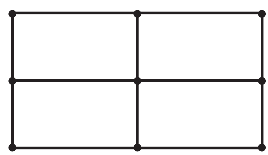


Рис. 2

Указание. Можно считать, что фигура составлена из 6 отрезков, каждый из которых составлен из двух отрезков. Поэтому всего $6 \cdot 3 = 18$.

20.* При разметке доски с помощью нитки эту нитку можно складывать пополам, получившуюся двойную нитку еще раз пополам, и так можно делать несколько раз подряд. Какие из длин в целое число сантиметров можно отметить на доске длиной 3 м, имея нитку длиной ровно в 1 м?

Указание. Сложив нитку пополам, получим 50 см. Еще раз сложив пополам, получим 25 см. При последующем сложении пополам целое число сантиметров уже не получается. Поэтому отметить удается только длины, кратные 25 см.

21.** При разметке доски с помощью нитки эту нитку можно складывать пополам, получившуюся двойную нитку еще раз пополам, и так можно делать несколько раз подряд. Какие из длин в целое число сантиметров можно отметить на доске длиной в 1 м, имея нитку длиной ровно в 1 м 28 см?

Указание. Складывая последовательно пополам, будем получать отрезки длиной 64 см, 32 см, 16 см, 8 см, 4 см, 2 см, 1 см. Поэтому на данной доске можно отметить любой отрезок длиной в целое число сантиметров от 1 см до 100 см.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. При измерении отрезка AB получили, что его длина находится между 520 и 605 см. Какие из указанных значений не могут быть длиной этого отрезка?

1) 51 дм; 2) 55 дм; 3) 6 м; 4) 61 дм.

Указание. Приведенные варианты ответов выразить в сантиметрах и отобрать те из них, которые больше 520 и меньше 605.

2.4. При измерении отрезка AB получили, что его длина 4532 см. Какие из указанных значений являются значениями его длины с избытком?

1) 40 м; 2) 50 м; 3) 100 м; 4) 12 000 м.

Указание. Приведенные варианты ответов выразить в сантиметрах и отобрать те из них, которые больше 4532.

§ 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЛИНЫ. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — установить аддитивность длины как свойство меры отрезков (длина суммы отрезков равна сумме длин отрезков), сформулировать неравенство треугольника, рассмотреть примеры применения неравенства треугольника.

Особенности параграфа. В параграфе на основе наблюдений за отрезками на клетчатой бумаге формулируются два свойства длины.

1. Для точки C, лежащей на отрезке AB, выполняется равенство $|AC| + |CB| = |AB|$.

2. Для точки D, не лежащей на отрезке AB, выполняется неравенство $|AD| + |DB| > |AB|$.

Первое из этих свойств отражает аддитивное свойство длины: если отрезок AB составлен из отрезков AC и CB, то длина отрезка AB равна сумме длин составляющих его отрезков. Второе свойство позволяет установить важное неравенство треугольника.

На третьем уровне поясняется, что первое из основных свойств длины является тем свойством, которое из всех точек плоскости выделяет точки, лежащие на отрезке. Часть параграфа посвящена изучению неравенства треугольника. Сначала уточняется понятие треугольника, а затем с использованием второго основного свойства длины устанавливается неравенство треугольника и рассматриваются применения этого неравенства в задачах о поиске кратчайшего пути. Задача, которая разбирается на третьем уровне, достаточно сложная и требует особого внимания со стороны учителя.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: длина отрезка; понятие числового неравенства; отрезок, составленный из двух отрезков; вершина треугольника; сторона треугольника.

Новые математические понятия и свойства: определение треугольника; неравенство треугольника, основные свойства длины.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Пусть имеется квадрат $ABCD$ со стороной 5 см. Как пояснить, что длина отрезка AC меньше 10 см?

Ответ. По основному свойству длины, так как $|AC| < |AB| + |BC| = 10$ см.

3.2.** Каким свойством характеризуются точки, не лежащие на отрезке?

Вариант ответа. Если точка D не лежит на отрезке AB, то $AD + DB > AB$. Обратно, если $AD + DB > AB$, то точка D не лежит на отрезке AB. Другими словами, сумма расстояний от каждой из точек, не лежащих на заданном отрезке, до концов данного отрезка строго больше длины этого отрезка.

3.3. Сколько треугольников можно указать, используя в качестве вершин треугольников вершины заданного квадрата?

Ответ. Четыре.

3.4. Почему не существует треугольника со сторонами длиной 1 км, 2 км, 3 км?

Ответ. Если бы такой треугольник существовал, то для него выполнялось бы неравенство треугольника. В частности, 3 км < 1 км + 2 км, но это неравенство не выполняется.

3.5.* В пункте рассматривается задача: «Комната имеет вид куба, как показано на рис. 6. Как должна ползти муха по боковой стене и потолку, чтобы попасть из нижнего угла N на полу комнаты в верхний угол V на потолке по кратчайшему пути?

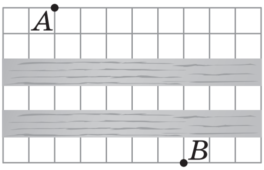


Рис. 1

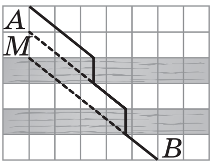


Рис. 2

Вопрос. По какому кратчайшему пути муха может перелететь из точки N в точку V?

Ответ. По отрезку, соединяющему эти точки.

3.6.** В каких местах нужно строить мосты, если пункты A и B разделяют две реки, расположенные, как на рис. 1?

Ответ. Решение похоже на приведенное в данном пункте. Сместим точку A вниз на ширину двух рек и после этого полученную точку M соединим с точкой B, как указано на рис. 2. Окончательный кратчайший путь и расположение мостов выделено на этом рисунке жирной линией.

Указания к решению наиболее трудных задач.

16. Что длиннее: сторона квадрата или его диагональ? Проверьте ответ непосредственным измерением.

Указание. На данном этапе приходится опираться на наглядные соображения. Если на клетчатой бумаге нарисовать квадрат $ABCD$ и отметить точку O пересечения диагоналей, то можно заметить, что $AO = BO = CO = DO$. Так как точка O не лежит на отрезке AB, то $AB < AO + OB = AO + OC = AC$.

17.* Может ли диагональ ромба быть короче его стороны?

Указание. Если сделать «вытянутый» ромб, то на глаз видно, что его меньшая диагональ меньше стороны.

18.** Имеется линейка, на которой остались только отметки 0, 1, 3, 7 и 15 см. Отрезки какой длины можно точно измерить, прикладывая линейку один раз?

Указание. Для ответа на вопрос достаточно вычислить всевозможные разности между отметками. В результате получим следующие значения: 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 6 см, 7 см, 8 см, 12 см, 14 см, 15 см.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Известно, что точка B не лежит на отрезке AC, а длины отрезков AB и BC равны 12 см и 15 см. Какие из указанных значений не могут быть длиной отрезка AC?

1) 23 см; 2) 25 см; 3) 27 см; 4) 29 см.

Указание. Из указанных не могут быть значения, которые больше или равны 27 см.

2.3. Известно, что точка B не лежит на отрезке AC, а длины отрезков AB и BC равны 25 см и 14 мм. Какие из указанных значений не могут быть длиной отрезка AC?

1) 26 см; 2) 27 см; 3) 28 см; 4) 29 см.

Указание. Выразить все длины в миллиметрах и отобрать те варианты, которые больше или равны 264 либо меньше или равны 236.

§ 4. ЛОМАНАЯ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием ломаной, определить длину ломаной, периметр многоугольника, рассмотреть одно из обобщений неравенства треугольника.

Особенности параграфа. Параграф затрагивает довольно сложное понятие ломаной. Сначала на примерах формируются наглядные представления о ломаной, определяются длина ломаной и периметр многоугольника. В итоге вырабатывается некоторый зрительный образ ломаной. На втором уровне ученики должны воспринимать разницу между ломаной с самопересечениями, ломаной без самопересечений с совпадающими концами и простой ломаной с несовпадающими концами.

Однако к понятию ломаной можно подходить с более общей точки зрения. Часто ломаную определяют как последовательно соединенные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... , $A_{n-1}A_n$, такие, что никакие три соседние точки не лежат на прямой. При этом не исключается, что среди точек A_1, A_2, ... , A_n есть совпадающие. Такое определение соответствует тому, что ломаная моделирует непрерывный путь от одной точки до другой, проходимый по отрезкам. И оказывается, что при таком, оправданном с математической точки зрения, подходе к ломаной обнаруживаются совершенно неожиданные эффекты. На это в параграфе на третьем уровне обращается внимание. Несколько приведенных примеров демонстрируют, что ломаные, понимаемые как непрерывно проходимые по отрезкам пути от одной точки до другой, могут быть разными, а их наглядные геометрические образы могут совпадать.

Дополнительно на третьем уровне поясняется, что длина отрезка меньше длины любой ломаной, соединяющей его концы.

Для этого на конкретном примере приводятся все необходимые обоснования.

Новые математические понятия и свойства: ломаная; вершины ломаной; звенья ломаной; концы ломаной; простая ломаная; длина ломаной; свойство длины ломаной; периметр многоугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Чему равна длина ломаной, составленной из 20 равных звеньев длиной 5 см?

Ответ. 100 см.

4.2. В пункте рассмотрен четырехугольник, у которого найден периметр, равный 10 см. *Вопрос.* Чему равно значение периметра этого четырехугольника в миллиметрах?

Ответ. 100 мм.

4.3.** Какие ломаные из пяти звеньев можно изобразить, используя в качестве вершин четыре вершины квадрата?

Варианты ответа. Пусть $ABCD$ — квадрат. Несколько возможных вариантов пятизвенных ломаных: $ABCDBA$, $ABCADC$, $ADBCAD$, $ABADAC$. Они условно изображены соответственно на рис. 1, 2, 3, 4. Заметим, что рисунки далеко не полностью отражают особенности ломаных, потому что в каждом из приведенных случаев какие-то отрезки проводятся не по одному разу.

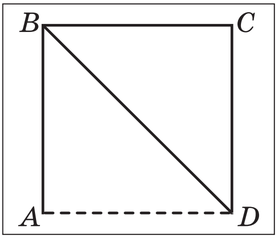


Рис. 1

4.4.* Почему из Москвы в Новосибирск нельзя попасть по самому короткому пути?

Вариант ответа. Самый короткий путь — это отрезок. На земном шаре от-

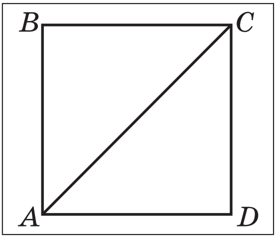


Рис. 2

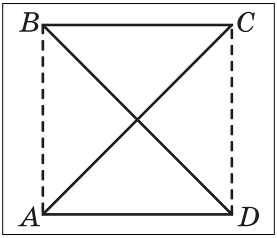


Рис. 3

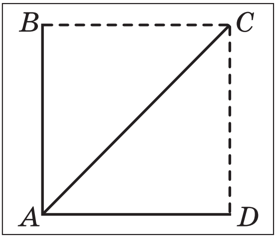


Рис. 4

резок, соединяющий Москву с Новосибирском, проходит под землей и достаточно глубоко от поверхности (в средней точке на глубине около 200 км).

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.* Пусть точки A, B, C, D заданы, как на рис. 5. Нарисуйте все возможные простые ломаные из трех звеньев с концами в этих точках.

Указание. Всевозможными способами переставить буквы A, B, C, D и в соответствии с этими перестановками рисовать ломаные. После этого выбрать из них ломаные без самопересечений.

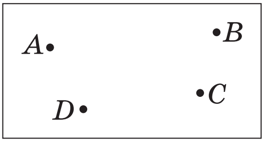


Рис. 5

20.** Нарисуйте ломаную длиной 9 см из 5 звеньев, расстояние между концами которой равно 8 см.

Указание. На клетчатой бумаге сначала можно нарисовать прямоугольник со сторонами 8 см и 5 мм, считая, что сторона клетки имеет длину 5 мм. Затем с помощью трех сторон этого прямоугольника можно нарисовать ломаную $ABCDEF$, у которой AB, CD, EF расположены горизонтально, BC, DE вертикально и $|AB| = |EF| = 3$ см, $|CD| = 2$ см, $|BC| = |DE| = 5$ мм.

22. Одна из сторон треугольника равна 30 см, а вторая равна 29 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое больше одной из данных сторон.

Указание. Если предположить, что третья сторона равна $30 \cdot 2 = 60$ см, то не будет выполнено неравенство треугольника. Поэтому надо в качестве третьей стороны рассмотреть отрезок в $29 \cdot 2 = 58$ см.

23. Решается аналогично задаче 22.

26.** На клетчатой бумаге в квадрате со стороной в 101 шаг сетки нарисован большой многоугольник по такому же принципу, по какому на рис. 6 нарисован многоугольник внутри квадрата со стороной в 7 шагов. Найдите периметр большого многоугольника в шагах сетки.

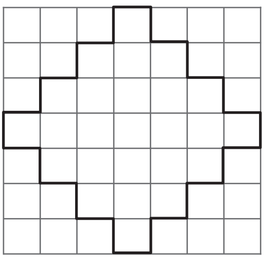


Рис. 6

Указание. Можно заметить, что периметр этого многоугольника равен периметру квадрата, содержащего этот многоугольник. Эта закономерность выполняется и в общем случае.

27.** в) Может ли внутри квадрата со стороной в 1 м уместиться ломаная без самопересечений длиной 100 км?

Указание. Может уместиться простая ломаная сколь угодно большой длины. Например, внутри квадрата параллельно одной из сторон можно провести 100 000 разных отрезков длиной в 1 м. Соединяя их «змейкой», получим ломаную, длина которой больше 100 км.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Известно, что существует четырехугольник $ABCD$, у которого $|AB| = 5$ см, $|BC| = 18$ см, $|CD| = 6$ см. Какие из указанных значений не могут быть длиной стороны AD?

1) 7 см; 2) 15 см; 3) 23 см; 4) 31 см.

Указание. Первое: длина стороны AD меньше суммы длин всех остальных сторон. Второе: сумма длин сторон AD, AB и CD должна быть больше длины стороны BC. Это позволяет в качестве ответов отобрать варианты 1 и 4.

2.3. Длины сторон треугольника — целые числа, причем две из них имеют длины 5 см и 2 см. Какие из указанных значений не могут быть длиной его третьей стороны?

1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см; 4) 6 см.

Указание. В каждом из вариантов проверить, выполняется ли неравенство треугольника или нет.

Глава 5
СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель главы — выработать и закрепить у учащихся навыки сложения и вычитания многозначных натуральных чисел, обратить внимание на основные законы сложения и вычитания.

Особенности главы. Изучение данной главы основывается на том, что с основными понятиями и примерами сложения и вычитания натуральных чисел учащиеся частично уже знакомились в начальной школе. Исходя из этого, рассматриваются алгоритмы сложения и вычитания многозначных чисел, которые частично отличаются от известных из младших классов, изучаются основные законы сложения и вычитания. На третьем уровне дополнительно рассматриваются алгоритмы сложения и вычитания в системах счисления с основаниями, отличными от 10.

§ 1. ЕЩЕ РАЗ О СЛОЖЕНИИ

Цель параграфа — рассмотреть алгоритмы сложения многозначных чисел; напомнить основное свойство длины отрезков и применить его для иллюстрации сложения и вычитания натуральных чисел с помощью прибора, составленного из двух линеек; сформулировать основные законы сложения.

Особенности параграфа. Главной особенностью является по-новому записываемый алгоритм сложения «столбиком» многозначных чисел. Этот способ записи состоит в том, что для получения итоговой суммы используются две вспомогательные строки. При сложении по столбцам цифр одного и того же разряда получается промежуточный результат в виде однозначного или двузначного числа. Когда промежуточный результат двузначный, цифра единиц записывается в том же разряде в первой вспомогательной строке, а цифра десятков записывается со смещением на разряд влево во второй вспомогательной строке. Проделав эту работу по всем столбцам разрядов, переходят к сложению цифр во вспомогательных строках по такому же алгоритму. Процесс сложения заканчивается, когда вторая вспомогательная строка оказывается пустой. Новый способ записи сложения многозначных чисел имеет определенные преимущества, поскольку не заставляет удерживать в памяти вспомогательные числа — они сразу же выписываются на бумаге. Более того, так как «все записано на бумаге», то на выработку необходимых навыков требуется не так много времени. На примере устройства из двух линеек иллюстрируется связь между сложением чисел и аддитивным свойством длины.

На третьем уровне рассматривается алгоритм сложения в недесятичных системах счисления. При изучении этого материала важно обратить внимание на то, что алгоритм сложения полностью копирует алгоритм сложения чисел в десятичной записи, с той лишь разницей, что используются новые таблицы сложения однозначных чисел.

Важно контролировать правильное усвоение учащимися изучаемого материала, который рассчитан на разъяснение механизмов, на которых основаны приемы счета с помощью действий сложения и вычитания.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сложение однозначных чисел; сложение двузначных чисел; умение пользоваться обыкновенной линейкой с миллиметровыми делениями.

Новые математические понятия и свойства: слагаемое; сумма; алгоритм сложения; переместительный закон сложения; сочетательный закон сложения.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: алгоритм.

Вспомогательные понятия: сложение чисел при помощи двух линеек.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как записать «столбиком» сложение трех однозначных чисел?

Варианты ответа. Первый вариант. Запишем три данных числа столбиком, подчеркнем их горизонтальной чертой и запишем под чертой сумму первых двух чисел, как это показано в пункте. Если при этом получится число, большее 10, то 1 напишем в разряде десятков, опустив ее строкой ниже цифры единиц. Далее к полученной цифре единиц прибавим третье число и запишем цифру единиц на строчку ниже предыдущей цифры единиц. Если при этом получится еще 1 в разряде десятков, то ее запишем левее и ниже. Остается теперь сложить цифры десятков и получить сумму, у которой цифра десятков либо отсутствует, либо равна 1, либо равна 2.

Второй вариант. Можно сначала сложить два числа, а затем к результату прибавить третье.

1.2. Чему равна сумма 600 и 800?

Ответ. Сумма 6 сотен и 8 сотен равна 14 сотням, то есть числу 1400.

1.3. Чему равна сумма 230 и 80?

Ответ. Сумма 23 десятков и 8 десятков равна $23 + 8 = 31$ десятку, то есть числу 310.

1.4. Чему равна сумма $20 + 40 + 70$?

Ответ. 130.

1.5.* Как вычислить столбиком сумму $37 + 45 + 53$?

Варианты ответа. Первый вариант. Найдем сначала сумму $37+45$, а потом к результату «столбиком» прибавим число 53.

Второй вариант. Сложим три числа столбиком подобно тому, как это делалось при ответе на вопрос пункта 1.1.

Третий вариант. Сложим сначала цифры единиц, получим 15. Далее найдем сумму десятков: 12. Наконец, сложив 120 и 15, получим в результате 135.

1.6. В каком случае сумма двузначного и трехзначного чисел является четырехзначным числом?

Ответ. Первая слева цифра трехзначного числа должна быть 9, а следующие две цифры давать число, которое в сумме с данным двузначным числом составляет больше 100.

1.7.** По каким правилам составляется таблица сложения в системе счисления с основанием 4?

Варианты ответа. Первый вариант. Сложение цифр сначала произвести в десятичной системе, а затем полученные результаты записать в системе счисления с основанием 4.

Второй вариант. Перемещаясь по клеткам таблицы сложения слева направо с переходом на ниже расположенную строку, каждый раз увеличивать предыдущий результат на 1 и представлять в новой системе счисления.

1.8. Как вы подсчитываете общую стоимость покупок в магазине?

Вариант ответа. Складывая вместе стоимости каждой из покупок последовательно или группируя.

1.9.* Как с помощью двух линеек находить приближенные значения с недостатком и с избытком для суммы двух трехзначных чисел?

Ответ. Будем считать, что двухзначные числа можно точно сложить с помощью линеек. Тогда для вычисления с недостатком суммы двух трехзначных чисел находим их приближения с точностью до 10 с недостатком и складываем получающиеся двузначные количества десятков. Приписывая в конце этой суммы цифру 0, находим приближенное значение искомой суммы с недостатком. Аналогично находится приближенное значение суммы с избытком.

1.10. Какое число появится на пересечении 79-й строки и 146-го столбца, если все-таки продолжить составление таблицы сложения?

Ответ. Строка с номером 79 начинается с числа 80. Если по этой строке пройти до столбца с номером 146, то получим сумму $80 + 145 = 225$.

1.11. Какие законы сложения позволяют записать равенство: $(3 + 5) + (7 + 8) = (3 + 7) + (5 + 8)$?

Ответ. Сочетательный закон позволяет раскрыть скобки, переместительный закон позволяет переставить слагаемые, а после этого на основе сочетательного закона вновь поставить скобки.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9. Найдите сумму наибольшего пятизначного и наименьшего четырехзначного чисел.

Указание. В задаче требуется найти $99\,999 + 1000$.

12. После выполнения сложения на доске были стерты отмеченные звездочками цифры. Восстановите примеры:

а) 36*8 + 274* + 3*20 = **148; б) 56*7 + 9341 + *32 = 1518*.

Указание. а) Сначала удается восстановить второе слагаемое: 2740, затем первое слагаемое: 3688, после этого третье слагаемое: 3720, а в итоге и сумму: 10 148.

б) Сначала удается восстановить сумму: 15180.

21.** Найдите сумму всех чисел от 1 до 100.

Указание. $1 + 100 = 2 + 99 = ... = 50 + 51 = 101$. Поэтому $1 + 2 + ... + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Чему равна сумма чисел $(100110)_2$ и $(11010)_2$, записанных в двоичной системе?

1) $(111110)_2$; 2) $(1000000)_2$; 3) $(1011110)_2$; 4) $(1010100)_2$.

Указание. Правильная сумма получается по алгоритму сложения и равна $(1000000)_2$.

1.4.* Чему равна сумма чисел $(123)_4$ и $(321)_4$, записанных в системе счисления с основанием 4?

1) $(1010)_4$; 2) $(1110)_4$; 3) $(1120)_4$; 4) $(1220)_4$.

Указание. Правильная сумма получается по алгоритму сложения и равна $(1110)_4$.

2.2.* Складывая числа $(110)_2$ и $(101)_2$, записанные в двоичной системе, ученик ошибся и получил неверный результат $(1101)_2$. Цифры каких разрядов найдены неверно?

1) цифра единиц (первого разряда);

2) цифра второго разряда;

3) цифра третьего разряда;

4) цифра четвертого разряда.

Указание. Правильная сумма получается по алгоритму сложения и равна $(1011)_2$.

§ 2. ВЫЧИТАНИЕ. РАЗНОСТЬ

Цель параграфа — изучить операцию вычитания многозначных натуральных чисел, познакомиться с алгоритмами вычитания, рассмотреть основные законы сложения и вычитания для натуральных чисел. При изучении параграфа учащиеся должны выработать устойчивые навыки вычитания многозначных чисел.

Особенности параграфа. В параграфе напоминается определение разности двух натуральных чисел и разбирается алгоритм вычитания при записи чисел «столбиком».

На втором уровне в порядке ознакомления рассматриваются уравнения вида $a + x = b$ при $b < a$ и указывается на необходимость пополнения в этом случае натуральных чисел отрицательными. На третьем уровне рассматривается понятие «дополнение натурального числа до разрядной единицы» и с его помощью приводится новый способ вычитания, который в основном сводится к сложению многозначных чисел с последующим вычитанием разрядной единицы. В конце параграфа, также для третьего уровня, приводятся некоторые формулы, связанные с раскрытием скобок при вычитании.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: буквенное выражение; сумма натуральных чисел.

Новые математические понятия и свойства: уравнение; корень уравнения; уменьшаемое; вычитаемое; разность; вычитание; алгоритм вычитания; свойства нуля при сложении; свойства разности; дополнение до разрядной единицы.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: отрицательные целые числа.

Вспомогательные понятия: решение уравнения методом подбора корня; невыполнимость действия; вычитание чисел при помощи двух линеек.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как можно проверить правильность результата вычитания одного числа из другого?

Вариант ответа. Сложением разности и уменьшаемого.

2.2. Почему первый штрих на шкале линейки помечен нулем, а не единицей?

Вариант ответа. Шкалу линейки можно считать моделью числовой прямой, а начало на числовой прямой отмечается как 0.

2.3.* Как проверить правильность результата вычитания, выполненного с помощью линейки?

Вариант ответа. Представление разности с помощью прибора, состоящего из двух линеек, соответствует применению этого прибора к вычислению суммы разности и уменьшаемого, причем результат сложения расположен там, где находится уменьшаемое.

2.4. Сколько существует таких натуральных чисел a, что разность $a - 5$ не определена?

Ответ. Всего 4, это все натуральные числа, меньшие 5.

2.5.** Какую запись для суммы $100 + (-134)$ вы можете предложить?

Вариант ответа. $100 + (-134) = 100 - 134 = -34$.

2.6. Какое число является разностью чисел $n + 2$ и n для натурального числа n?

Ответ. Число 2.

2.7. Как убедиться в правильности вычитания, выполненного в пункте «столбиком»?

Вариант ответа. Сложением «столбиком» разности и уменьшаемого.

2.8. Как показать, что $((a + b + 1) - a) - b = 1$?

Вариант ответа. Используя сочетательный и переместительный законы сложения, в первых скобках получаем $(a + b + 1) - a = b + 1$. После этого получаем $(b + 1) - b = 1$.

2.9.** Чему равно дополнение натурального числа 53 до 1 000 000?

Ответ. 999 947.

2.10.** Как находить дополнения до разрядных единиц для чисел, записанных в двоичной системе счисления?

Вариант ответа. Находим самый младший разряд с цифрой 1, за которым справа записаны нули. Далее, под этой единицей ставим единицу, поставив под идущими справа нулями нули. В разрядах, расположенных левее указанной единицы, под нулями ставятся единицы, а под единицами ставятся нули. Например, $\dfrac{1001101110100}{110010001100}$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5. Какое число надо прибавить к 321, чтобы получилась сумма чисел 225 и 168?

Указание. Нужно найти $(225 + 168) - 321$.

6. Какое число надо прибавить к 123, чтобы получилась разность чисел 345 и 77?

Указание. Нужно найти $(345 - 77) - 123$.

7. Какое число надо вычесть из 543, чтобы получилась сумма чисел 98 и 325?

Указание. Нужно найти $543 - (98 + 325)$.

8. Какое число надо вычесть из 85, чтобы получилась разность чисел 122 и 98?

Указание. Нужно найти $85 - (122 - 98)$.

15. Матери было 25 лет, когда родилась дочь, и 28 лет, когда родился сын. Сколько лет каждому из них, если теперь всем троим вместе 46 лет?

Указание. Обозначив через x возраст сына, можно составить уравнение $x + (x + 3) + (x + 28) = 46$.

24.* Сколько дней прошло: а) от 1 апреля 2000 года до 21 сентября 2000 года включительно; б) от 21 сентября 2000 года до 1 апреля 2001 года включительно?

Указание. Для подсчета числа дней в задачах такого вида нужно научиться выделять целые года с учетом високосных, целые месяцы с учетом их дней и вычислять число дней в неполных месяцах. Проиллюстрируем это на примере пункта *б*. С 21 по 30 сентября проходит 10 дней; в октябре, ноябре и декабре всего 31 + 30 + 31 = 92 дня; в январе, феврале и марте невисокосного 2001 года всего 31 + 28 + 31 = 90 дней; итого с 21 сентября 2000 года до 1 апреля 2001 года прошло всего 10 + 92 + 90 =192 дня.

26. Записаны цифры 123456789. Между некоторыми из них поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы в результате получилось число 100.

Варианты решений. 12 − 3 − 4 + 5 − 6 + 7 + 89 или 12 + 3 + + 4 + 5 − 6 − 7 + 89.

27. Записаны цифры 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Между некоторыми из них поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы в результате получилось число 100.

Вариант решения. 98 + 7 − 6 + 5 − 4 + 3 − 2 − 1.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Какие из указанных выражений равны сумме 7214 + + (871 − 214)?

1) 214 + (7871 − 214); 2) 7000 + 871;
3) 7000 + (657 − 214); 4) 7000 + (1085 − 214).

Указание. Легко проверяется, что подходят варианты 1, 2, 4. Вариант 3 можно сразу отбросить по той причине, что значение выражения заведомо меньше 7600, что меньше 7871.

2.4. Какие из записей являются верными равенствами?

1) 200 − (96 − 41) = (200 − 96) − 41;
2) 200 − (96 − 41) = (200 − 96) + 41;
3) 200 − (96 − 41) = 200 − 55;
4) 200 − (96 − 41) = 200 + 55.

Указание. Правильно раскрыты скобки во втором варианте, и правильно выполнено действие в скобках в третьем варианте.

ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Нарисуйте пятиугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы D, F, P, S, T. Запишите тремя различными способами обозначение этого пятиугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $KLMNOP$ фигура является шестиугольником. Запишите, какие стороны этого шестиугольника являются соседними со стороной OP.

3. Сколько можно составить не равных между собой многоугольников из четырех равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 3 узла. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 4 узла.

5. Изобразите три окружности, две из которых имеют хотя бы одну общую точку, а третья находится внутри одной из двух, но не содержится внутри второй.

Вариант 2

1. Нарисуйте шестиугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы P, F, B, A, T, M. Запишите тремя различными способами обозначение этого шестиугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $QLNOP$ фигура является пятиугольником. Запишите, какие стороны этого пятиугольника являются соседними со стороной PQ.

3. Сколько можно составить не равных между собой прямоугольников из 12 равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 7 узлов. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 8 узлов.

5. Изобразите три окружности, две из которых имеют хотя бы одну общую точку, а третья находится внутри первых двух окружностей.

Вариант 3

1. Нарисуйте пятиугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы M, P, F, B, A. Запишите четырьмя различными способами обозначение этого пятиугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $NOPQR$ фигура является пятиугольником. Запишите, какие стороны этого пятиугольника не являются соседними со стороной RN.

3. Сколько можно составить не равных между собой прямоугольников из 16 равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 9 узлов. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 10 узлов.

5. Изобразите три равные окружности, которые имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант 4

1. Нарисуйте четырехугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы C, F, K, A. Запишите четырьмя различными способами обозначение этого четырехугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $NOPQRS$ фигура является шестиугольником. Запишите, какие стороны этого шестиугольника не являются соседними со стороной SN.

3. Сколько можно составить не равных между собой прямоугольников из 20 равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 5 узлов. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 6 узлов.

5. Изобразите три окружности, две из которых имеют хотя бы одну общую точку, а третья содержит внутри себя первые две.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Выразите в метрах расстояние:
а) 3 км 150 м; б) 23500 см.

2. Найдите, сколько минут в одних сутках.

3. Торт весом 800 граммов поделили на 12 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (b + 4) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 8$; $a = 4$; б) $b = 2$; $a = 3$; в) $b = 5$; $a = 1$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 2 на 18 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 10 на 10 см (закладки можно разрезать).

Вариант 2

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 5 км 760м; б) 66300 см.

2. Найдите, сколько минут в двух сутках.

3. Торт весом 1 килограмм поделили на 12 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (b + 3) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 7$; $a = 5$; б) $b = 9$; $a = 3$; в) $b = 11$; $a = 2$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 3 на 18 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 12 на 12 см (закладки можно разрезать).

Вариант 3

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 2 км 950м; б) 45400 см.

2. Найдите, сколько часов в июне.

3. Торт весом 700 граммов поделили на 8 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (6 + b) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 10$; $a = 4$; б) $b = 12$; $a = 3$; в) $b = 5$; $a = 11$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 3 на 12 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 9 на 9 см (закладки можно разрезать).

Вариант 4

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 10 км 50м; б) 243500 см.

2. Найдите, сколько часов в августе.

3. Торт весом 1 килограмм поделили на 6 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (b + b + 4) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 8$; $a = 4$; б) $b = 2$; $a = 4$; в) $b = 7$; $a = 6$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 4 на 10 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 9 на 9 см (закладки можно разрезать).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 12^2; б) 2^7; в) 4^4; г) 5^5; д) 104^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 7664; б) 54341; в) 98766764.

3. Расставьте в порядке убывания числа:

15 344; 1851; 14 889; 2245; 388; 9999.

4. Расставьте в порядке возрастания числа:

1987; 1414; 66 013; 1274; 9807; 9999.

5. Найдите наименьшее и набольшее из чисел:

65 520; 65 302; 32 117; 124 487; 99; 111.

Вариант 2

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 11^2; б) 2^6; в) 3^4; г) 5^6; д) 101^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 7201; б) 24321; в) 60032155.

3. Расставьте в порядке убывания числа:

14 998; 1599; 14 999; 2175; 391; 9999.

4. Расставьте в порядке возрастания числа:

987; 1234; 56 003; 1204; 90 807; 9999.

5. Найдите наименьшее и набольшее из чисел:

65 000; 65 102; 3217; 123 987; 99; 531.

Вариант 3

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 13^2; б) 2^8; в) 6^4; г) 3^6; д) 115^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 9564; б) 71234; в) 896745321.

3. Расставьте в порядке возрастания числа:
27 998; 1599; 27 989; 2175; 991; 9999.

4. Расставьте в порядке убывания числа:
897; 4321; 14 467; 1654; 14 567; 9999.

5. Найдите наибольшее и наименьшее из чисел:
35 000; 66 452; 2357; 112 387; 99; 131.

Вариант 4

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 19^2; б) 2^{10}; в) 5^4; г) 3^5; д) 201^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 4356; б) 43265; в) 71254389.

3. Расставьте в порядке возрастания числа:
56 898; 1999; 55 999; 1165; 991; 9919.

4. Расставьте в порядке убывания числа:
76 898; 2199; 76 999; 1166; 981; 9119.

5. Найдите наименьшее и набольшее из чисел:
62 111; 62 092; 3677; 111 199; 199; 111.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы концы этого отрезка лежали на первых двух отрезках.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 12 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 7 и меньше 8. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 8 см; длина AB на 2 см меньше длины BC; длина CD в два раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 15 мм, 6 см, 38 мм, 11 см и 57 мм.

5. Одна из сторон треугольника равна 56 мм, а вторая равна 9 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое меньше одной из данных сторон.

Вариант 2

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы концы этого отрезка лежали на концах первых двух отрезков.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 11 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 11 и меньше 12. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 16 см; длина AB на 4 см меньше длины BC; длина CD в три раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 25 см, 6 мм, 58 мм, 21 см и 107 мм.

5. Одна из сторон треугольника равна 36 мм, а вторая равна 6 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое меньше одной из данных сторон.

Вариант 3

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы этот отрезок имел по одной общей точке с первыми двумя отрезками.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 13 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 5 и меньше 6. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 12 см; длина AB на 4 см меньше длины BC; длина CD в четыре раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 40 мм, 16 см, 56 см, 11 см и 204 мм.

5. Одна из сторон треугольника равна 45 мм, а вторая равна 6 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она втрое меньше одной из данных сторон.

Вариант 4

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы на рисунке образовался треугольник.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 14 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 6 и меньше 7. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 18 см; длина AB на 2 см больше длины BC; длина CD в три раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 15 см, 61 мм, 18 см, 21 мм и 17 см.

5. Одна из сторон треугольника равна 26 мм, а вторая равна 2 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое больше одной из данных сторон.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $538 - x = 279$.

2. Найдите значение выражения $x + 643$:

а) при $x = 271$; б) при $x = 1819$; в) при $x = 53\,457$.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно $327 + 654$, а другое $146 + 418$.

4. Вычислите разность: $200\,000 - 5041$.

5. За первый час автомобиль проехал 38 км 370 м, за второй час проехал 73 км 210 м, за третий час проехал 81 км 820 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(101101)_2 + (11011)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $1438 - x = 889$.

2. Найдите значение выражения $x + 283$:

а) при $x = 771$; б) при $x = 3919$; в) при $x = 543\,577$.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно 732 + 344, а другое 776 + 588.

4. Вычислите разность: 2 000 000 — 15041.

5. За первый час автомобиль проехал 68 км 770 м, за второй час проехал 72 км 880 м, за третий час проехал 84 км 650 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(101111)_2 + (10010)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $1234 — x = 567$.

2. Найдите значение выражения $x + 234$:

а) при x =987; б) при x = 1879; в) при x = 78 654.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно 982 + 357, а другое 223 + 568.

4. Вычислите разность: 100 000 — 9091.

5. За первый час автомобиль проехал 97 км 350 м, за второй час проехал 85 км 700 м, за третий час проехал 94 км 450 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(101101)_2 + (10111)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $3321 — x = 2654$.

2. Найдите значение выражения $x + 2654$:

а) при x =172; б) при x = 9999; в) при x = 68 659.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно 654 + 654, а другое 666 + 716.

4. Вычислите разность: 2 000 000 — 225 041.

5. За первый час автомобиль проехал 63 км 560 м, за второй час проехал 74 км 670 м, за третий час проехал 85 км 670 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(110001)_2 + (11011)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Запишите название натурального числа 102 003 000.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 739 081.

3. Запишите числа 2^5, 3^3, 4^2, 5^2 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 4^4.

5.* Укажите длительность недели в минутах с недостатком с точностью до 1000 минут.

Вариант 2

1. Запишите название натурального числа 7 000 500 201.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 605 493.

3. Запишите числа 6^2, 3^3, 5^2, 4^3 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 3^5.

5.* Укажите длительность недели в минутах с избытком с точностью до 1000 минут.

Вариант 3

1. Запишите название натурального числа 6 543 323 311.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 802 334.

3. Запишите числа 7^2, 3^4, 5^3, 4^4 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 2^7.

5.* Укажите длительность января в часах с избытком с точностью до 100 часов.

Вариант 4

1. Запишите название натурального числа 9 876 543 421.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 798 645.

3. Запишите числа 8^2, 2^8, 5^3, 4^5 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 5^4.

5.* Укажите длительность марта в часах с недостатком с точностью до 100 часов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 40087063020.

2. Отрезок MN составлен из двух отрезков ML и LN. Известно, что $|MN|$ = 1 м 37 см 3 мм, $|NL|$ = 76 см 8 мм. Найдите длину отрезка ML.

3. Вычислите сумму: $589\,342 + 714\,959 + 135\,107$.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*57 + 3*4 + 21* = *343.$$

5. Сумма двух чисел равна 749, а их разность равна 109. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(31)_4 + (103)_4$.

Вариант 2

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 5070038090.

2. Отрезок MN составлен из двух отрезков ML и LN. Известно, что $|MN|$ = 1м 58 см 4 мм, $|NL|$ = 69 см 7 мм. Найдите длину отрезка ML.

3. Вычислите сумму: $473\,819 + 356\,234 + 210\,518$.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*26 + 9*5 + 84* = *244.$$

5. Сумма двух чисел равна 853, а их разность равна 73. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(23)_4 + (111)_4$.

Вариант 3

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 70800043052.

2. Отрезок KS составлен из двух отрезков KP и PS. Известно, что $|KS|$ = 3м 77 см 5 мм, $|SP|$ = 1 м 89 см 7 мм. Найдите длину отрезка KP.

3. Вычислите сумму: $598\,766 + 554\,677 + 113\,487$.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*79 + 1*1 + 63* = *425.$$

5. Сумма двух чисел равна 735, а их разность равна 123. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(223)_4 + (321)_4$.

Вариант 4

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 2130030008.

2. Отрезок AC составлен из двух отрезков AB и BC. Известно, что $|AC| = 5$ м 14 см 4 мм, $|CB| = 3$ м 69 см 7 мм. Найдите длину отрезка BA.

3. Вычислите сумму: 73 485 + 356 442 + 845 623.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*56 + 5*8 + 71* = *205.$$

5. Сумма двух чисел равна 411, а их разность равна 143. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(323)_4 + (333)_4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Выполните умножение: $578 \cdot 694$.

2. Найдите произведение: $39 \cdot 41 \cdot 43$.

3. Найдите значение выражения $9743 \cdot 12 + 12 \cdot 250 + 17 \cdot 12$.

4.* Восстановите пример, поставив вместо звездочек нужные цифры:

$$1*7 \cdot 5* = 6731.$$

5. Вычислите: $3842^2 - 3841^2$.

6.** Найдите, чему в двоичной системе счисления равно произведение $(101)_2 \cdot (1100)_2$.

Вариант 2

1. Выполните умножение: $793 \cdot 668$.

2. Найдите произведение: $33 \cdot 41 \cdot 49$.

ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. 1. Например, *DFPST*, *FPSTD*, *PSTDF*. **2.** *NO*, *PK*. **3.** 5. **4.**** *Указание.* При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

Вариант 2. 1. Например, *MPFBAT*, *PFBATM*, *FBATMP*. **2.** *OP*, *QL*. **3.** 3. **4.**** *Указание.* При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

Вариант 3. 1. Например, *MPFBA*, *PFBAM*, *FBAMP*, *BAMPF*. **2.** *OP*, *PQ*. **3.** 3. **4.**** *Указание.* При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

Вариант 4. 1. Например, *CFKA*, *FKAC*, *KACF*, *ACFK*. **2.** *OP*, *PQ*, *QR*. **3.** 3. **4.**** *Указание.* При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. 1. 3150 м и 235 м. **2.** 1440. **3.** 60 г. **4.** а) 3; б) 2; в) 9. **5.** 3.

Вариант 2. 1. а) 5760 м; б) 663 м. **2.** 2880. **3.** 80 г. **4.** а) 2; б) 4; в) 7. **5.** 3.

Вариант 3. 1. 2950 м и 454 м. **2.** 720. **3.** 80 г. **4.** а) 4; б) 6; в) 1. **5.** 3.

Вариант 4. 1. 10050 м и 2435 м. **2.** 744. **3.** 160 г. **4.** а) 5; б) 2; в) 3. **5.** 3.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. 1. а) 144; б) 128; в) 256; г) 3125; д) 10 816. **2.** а) $7{\cdot}10^3 + 6{\cdot}10^2 + 6{\cdot}10^1 + 4$; б) $5{\cdot}10^4 + 4{\cdot}10^3 + 3{\cdot}10^2 + 4{\cdot}10^1 + 1$;

в) $9 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4$. **3.** 15 344; 14 889; 9999; 2245; 1851; 388. **4.** 1274; 1414; 1987; 9807; 9999; 66 013. **5.** 99 и 124 487.

Вариант 2. 1. а) 121; б) 64; в) 81; г) 15 625; д) 10 201. **2.** а) $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1$; б) $2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$; в) $6 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5$. **3.** 14 999; 14 998; 9999; 2175; 1599; 391. **4.** 987; 1204; 1234; 9999; 56 003; 90 807. **5.** 99 и 123 987.

Вариант 3. 1. а) 169; б) 256; в) 1296; г) 729; д) 13 225. **2.** а) $9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4$; б) $7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$; в) $8 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$. **3.** 991; 1599; 2175; 9999; 27 989; 27 998. **4.** 14 567; 14 467; 9999; 4321; 1654; 897. **5.** 112 387 и 99.

Вариант 4. 1. а) 361; б) 1024; в) 625; г) 243; д) 40 401. **2.** а) $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6$; б) $4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5$; в) $7 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9$. **3.** 991; 1165; 1999; 9919; 55 999; 56 898. **4.** 76 999; 76 898; 9119; 2199; 1166; 981. **5.** 111 и 111 199.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. 2. 9 см. **3.** 14 см. **4.** 280 мм. **5.** 45 мм.
Вариант 2. 2. 13 см. **3.** 34 см. **4.** 631 мм. **5.** 30 мм.
Вариант 3. 2. 7 см. **3.** 28 см. **4.** 1074 мм. **5.** 20 мм.
Вариант 4. 2. 9 см. **3.** 48 см. **4.** 582 мм. **5.** 40 мм.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. 1. 259. **2.** а) 914; б) 2462; в) 54 100. **3.** 1545. **4.** 194 959. **5.** 193 км 400 м. **6.**** $(1001000)_2 = 72$.

Вариант 2. 1. 549. **2.** а) 1054; б) 4202; в) 543 860. **3.** 2440. **4.** 1 984 959. **5.** 226 км 300 м. **6.**** $(1000001)_2 = 65$.

Вариант 3. 1. 667. **2.** а) 1221; б) 2113; в) 78 888. **3.** 2130. **4.** 90 909. **5.** 277 км 500 м. **6.**** $(1000100)_2 = 68$.

Вариант 4. 1. 667. **2.** а) 2826; б) 12 653; в) 71 313. **3.** 2690. **4.** 1 774 959. **5.** 223 км 900 м. **6.**** $(1001100)_2 = 76$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. 1. *Указание*. Например, можно провести три прямые горизонтально и одну вертикально. **2.** 12. **3.** 18. **4.** 105 см. **5.** 42 см.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. 1. Сто два миллиона три тысячи. **2.** $7 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1 + 1$. **3.** 4^2, 5^2, 3^3, 2^5. **4.** 256. **5.*** 10 000.

Вариант 2. 1. Семь миллиардов пятьсот тысяч двести один. **2.** $6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3$. **3.** 4^3, 6^2, 3^3, 5^2. **4.** 243. **5.*** 11 000.

Вариант 3. 1. Шесть миллиардов пятьсот сорок три миллиона триста двадцать три тысячи триста одиннадцать. **2.** $8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$. **3.** 4^4, 5^3, 3^4, 7^2. **4.** 128. **5.*** 800.

Вариант 4. 1. Девять миллиардов восемьсот семьдесят шесть миллионов пятьсот сорок три тысячи четыреста двадцать один. **2.** $7 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5$. **3.** 4^5, 2^8, 5^3, 8^2. **4.** 625. **5.*** 700.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. 1. $4 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1$. **2.** 605 мм. **3.** 1 439 408. **4.** $757 + 374 + 212 = 1343$. **5.** 429 и 320. **6.**** $(200)_4$.

Вариант 2. 1. $5 \cdot 10^9 + 7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1$. **2.** 887 мм. **3.** 1 040 571. **4.** $426 + 97\,5 + 843 = 2244$. **5.** 463 и 390. **6.**** $(200)_4$.

Вариант 3. 1. $7 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^1 + 2$. **2.** 1878 мм. **3.** 1 266 930. **4.** $679 + 111 + 635 = 1425$. **5.** 429 и 306. **6.**** $(1210)_4$.

Вариант 4. 1. $2 \cdot 10^9 + 1 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^5 + 8$. **2.** 1447 мм. **3.** 1 275 550. **4.** $956 + 538 + 711 = 2205$. **5.** 277 и 134. **6.**** $(1322)_4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. 1. 401 132. **2.** 68 757. **3.** 120 000. **4.*** $127 \cdot 53 = 6731$. **5.** 7683. **6.**** $(111100)_2$.

Вариант 2. 1. 529 724. **2.** 66 297. **3.** 105 000. **4.*** $139 \cdot 49 = 6811$. **5.** 5973. **6.**** $(110110)_2$.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4
Глава 1								
§ 1	2	1	1	1	1, 2, 3	1	2, 4	2, 3, 4
§ 2	2	3	3	1	2, 3, 4	4	2, 3	1, 2
§ 3	3	1	3	3	2, 3	2, 4	3, 4	2, 3
Глава 2								
§ 1	2	4	2	2	1, 3, 4	1, 2	2, 3	1, 2, 3, 4
§ 2	2	2	2	2	1, 3	2, 4	2, 4	1, 2
§ 3	4	1	2	3	1, 2	4	1, 2	4
§ 4	4	3	3	3	1, 3	2, 4	1, 4	1, 2, 4
Глава 3								
§ 1	2	3	2	3	1, 2	1, 2, 3	1, 4	2, 3
§ 2	3	2	3	4	2, 3, 4	2, 4	2, 3	2, 4
§ 3	2	3	2	3	3, 4	1, 2	2, 3	2, 3
§ 4	3	2	3	4	1, 3	2, 4	1, 2, 3	2, 3, 4
§ 5	3	3	1	4	1, 2, 4	3, 4	2, 4	2, 3
Глава 4								
§ 1	2	3	3	1	3	3, 4	2	1, 4
§ 2	3	4	2	1	1, 4	4	1	2, 3
§ 3	3	2	3	4	3, 4	3, 4	2, 3, 4	1, 2
§ 4	2	4	3	3	3	1,4	1	1, 2
Глава 5								
§ 1	3	4	2	2	2, 3, 4	2, 3	1	2, 3
§ 2	3	4	2	4	1, 2, 3	1, 2, 4	1, 3	2, 3
Глава 6								
§ 1	2	2	1	4	2	2	1, 4	2, 3
§ 2	2	3	2	3	2, 3, 4	1, 2	1, 4	2, 4
§ 3	2	3	3	4	1, 4	1, 2, 3	1, 2	1, 2, 4